Elektromagnetno polje: 1. kolokvij, rešitve nalog

(6. 12. 2013 ob 17:00)

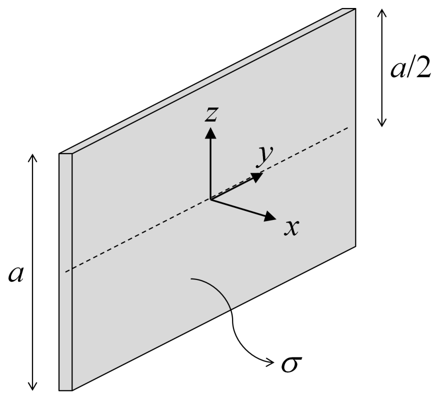
asistent: Martin Klanjšek, telefon: 01 477 3866, email: *martin.klanjsek@ijs.si*

1. naloga

Dolg trak širine a enakomerno nabijemo, tako da površinska gostota naboja znaša σ.

a) Določi jakost električnega polja v simetrijski ravnini traku (ravnini xy na sliki) kot funkcijo oddaljenosti x od traku. Dobljeni izraz poenostavi v limitah $x \gg a$ in $x \ll a$.

b) Simetrijska ravnina xy deli trak na dve polovici. Določi velikost električne sile na dolžinsko enoto traku, s katero se polovici odbijata. V kakšni medsebojni razdalji bi morala biti dolga ravna vodnika, s katerima bi nadomestili polovici traku, da bi se odbijala z enako silo?



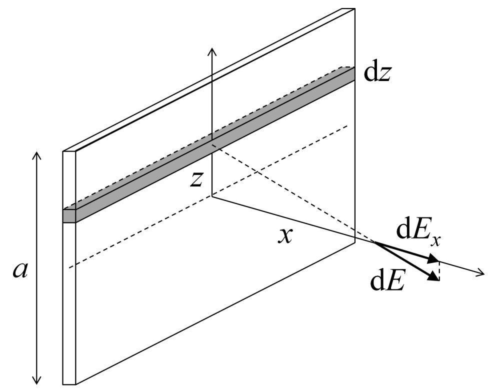
Koristna integrala:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x, \quad \int_0^\infty \operatorname{arctg}^2\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \pi \ln 2.$$

Rešitev:

a) Trak v mislih razdelimo na vzdolžne vodnike (glej sliko). Po Gaussu dobimo električno polje okrog vsakega vodnika:

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}e}{\varepsilon_0 \cdot 2\pi r l} = \frac{\sigma \mathrm{d}z}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+z^2}}.$$



V ravnini xy vsak vodnik prispeva vzdolžno komponento električnega polja

$$\mathrm{d}E_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{x^2+z^2}\mathrm{d}z.$$

Skupno polje dobimo z integracijo po z med $-a/2$ in $a/2$:

$$E_x = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\operatorname{arctg}\frac{a}{2x}.$$

V limiti $x \gg a$ je $\operatorname{arctg} a/(2x) \approx a/(2x)$ in $E_x \approx \sigma a/(2\pi\varepsilon_0 x)$. Trak se obnaša kot enakomerno nabit dolg raven vodnik. V limiti $x \ll a$ je $\operatorname{arctg} a/(2x) \approx \pi/2$ in $E_x = \sigma/(2\varepsilon_0)$. Trak se obnaša kot neskončna ravna plošča. Obe limiti sta pričakovani.

b) Silo izračunamo preko napetostnega tenzorja: $\vec{F} = \varepsilon_0 \oint \left[\vec{E}(\vec{E}\cdot\vec{n}) - \frac{1}{2}E^2\vec{n}\right]\mathrm{d}S$. Integriramo po ravnini xy, ki jo sklenemo po zgornjem polprostoru daleč stran od traku. Integral po tem delu je nič, saj E^2 pada kot r^{-2}, ploščina $S_{\rm zgoraj} = \pi r l$ pa narašča kot r. Zaradi $\vec{E} \perp \vec{n}$ je

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_x^2 \mathrm{d}S \quad\Longrightarrow\quad \frac{F}{l} = \frac{\sigma^2}{2\pi^2\varepsilon_0} 2\int_0^\infty \mathrm{arctg}^2\frac{a}{2x}\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2 a}{2\pi\varepsilon_0}\ln 2,$$

kjer smo v zadnjem koraku upoštevali podani integral. Če rezultat preuredimo v

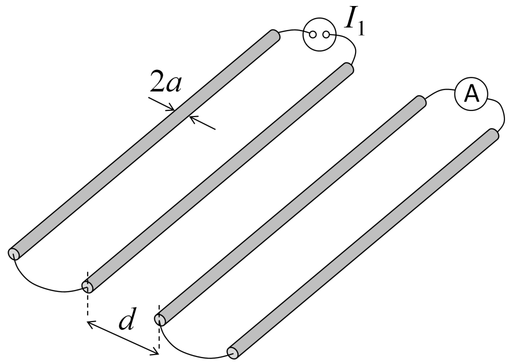
$$\frac{F}{l} = \frac{\sigma\frac{a}{2}\cdot\sigma\frac{a}{2}}{2\pi\varepsilon_0\cdot\frac{a}{4\ln 2}},$$

vidimo, da bi vodnika, s katerima bi nadomestili polovici traku, morala biti oddaljena za $a/(4\ln 2) = 0.36a$, da bi se odbijala z enako silo.

2. naloga

Štirje enaki *dolgi* ravni vodniki debeline $2a$ so zloženi vzporedno v medsebojnih razdaljah d, tako da ležijo v isti ravnini. Prva dva vodnika na koncih sklenemo preko izvora izmeničnega toka amplitude I_1, druga dva vodnika pa na koncih sklenemo preko merilnika izmeničnega toka (glej sliko). Kolikšno amplitudo toka izmerimo, če je $d/a = 10$?

Upor vodnikov zanemari in predpostavi, da izmenični tok teče le po površini vodnikov. Zavedaj se, da je $d \gg a$.



Rešitev:

Magnetno polje zaradi električnega toka v prvih dveh vodnikih zapišemo kot

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-d}\right),$$

kjer r označuje razdaljo od prvega vodnika. Magnetni pretok skozi zanko, ki jo oklepata druga dva vodnika, je potem

$$\Phi_2 = \int_{2d}^{3d} B_1(r)\cdot l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\ln\frac{3}{4}.$$

Ker je $\Phi_2 = L_{21}I_1$, iz zadnje enačbe preberemo $L_{12} = \mu_0 l/(2\pi)\cdot\ln\frac{3}{4}$. Med drugima vodnikoma se inducira napetost $U_2 = -\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t = -L_{12}\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t$, zaradi česar steče tok I_2, tako da velja $U_2 = L_2\mathrm{d}I_2/\mathrm{d}t$. Iz obeh enačb za U_2 potem dobimo $I_2 = -(L_{12}/L_2)I_1$. Potrebujemo še $L_2 = L_1$, ki ga izračunamo iz magnetnega pretoka skozi zanko, ki jo oklepata prva dva vodnika:

$$\Phi_1 = \int_a^d B_1(r)\cdot l\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi}\cdot 2\ln\frac{d}{a} = \frac{\mu_0 I_1 l}{\pi}\ln 10.$$

Iz zadnjega izraza preberemo $L_1 = \mu_0 l/\pi\cdot\ln 10$, tako da je

$$I_2 = -\frac{\ln\frac{3}{4}}{2\ln 10}I_1 = 0.062\, I_1.$$

Pri izračunih obeh magnetnih pretokov smo pri mejah d, $2d$ in $3d$ zaradi $d \gg a$ preprosto zanemarili debelino vodnikov.

3. naloga

V središče izolirane votle prevodne sfere polmera a postavimo točkast električni dipol z električnim dipolnim momentom p.

a) Določi potencial električnega polja povsod znotraj sfere.

b) Izračunaj električno polje naboja, ki se inducira na notranji površini sfere?

c) Izračunaj površinsko gostoto induciranega naboja kot funkcijo polarnega kota ϑ (če dipol kaže v smeri z).

d) Izračunaj skupni dipolni moment induciranega naboja.

Osno simetrične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\vartheta) = 0$ v sfernih koordinatah so $U(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta)$, nekaj prvih Legendrovih polinomov pa $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$.

Rešitev:

a) Potencial električnega polja je sestavljen iz prispevka dipola $U_d = \vec{p}\cdot\vec{r}/(4\pi\varepsilon_0 r^3) = p\cos\vartheta/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ in prispevka induciranih nabojev na sferi U_s. Če naj skupni potencial $U(r) = U_d(r) + U_s(r)$ zadosti robnemu pogoju $U(a) = 0$ za *vsak* ϑ, sme v zgoraj podani vrsti preživeti le člen z $l = 1$, zaradi končne velikosti v središču sfere pa je nadalje samo $A_1 \neq 0$. Iz robnega pogoja potem sledi $A_1 = -p/(4\pi\varepsilon_0 a^3)$ in

$$U(r) = U_d(r) + U_s(r) = \frac{p\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{pr\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.$$

b) Potenical električnega polja induciranih nabojev je očitno odvisen le od $z = r\cos\vartheta$, saj je $U_s(z) = -p/(4\pi\varepsilon_0 a^3)\cdot z$. Električno polje je torej *homogeno* in kaže s smeri dipola:

$$E_s = -\frac{\partial U_s}{\partial z} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.$$

c) Površinska gostota induciranih nabojev σ na površini je sorazmerna z radialno komponento $\nabla U(r)$, predznak pa je $+$ namesto $-$, saj $\partial/\partial r$ kaže s površine v notranjost:

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial U(r)}{\partial r}\bigg|_{r=a} = -\frac{3p\cos\vartheta}{4\pi a^3}.$$

d) Integriramo po površinskih rezinah na višinah $z = a\cos\vartheta$, kjer je $\mathrm{d}e = \sigma \mathrm{d}S = \sigma\cdot 2\pi a^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta$. Skupni dipolni moment induciranih nabojev je potem:

$$p_{\text{ind}} = \int z\,\mathrm{d}e = -\int_{-1}^{1} \frac{3}{2} p\cos^2\vartheta\,\mathrm{d}(\cos\vartheta) = -p,$$

ravno nasproten dipolnemu momentu notranjega dipola. Rezultat bi lahko tudi uganili: ker zunaj sfere ni električnega polja, mora biti skupni dipolni moment znotraj sfere enak nič.

4. naloga (dodatna)

Topološki izolator je snov, ki ima naslednjo zanimivo lastnost: če ga premažemo s tanko plastjo magnetnega materiala, njegova površina kaže topološki magneto-električni efekt. To pomeni, da sta *na površini* električno in magnetno polje med seboj povezani. Zaradi enostavnosti obravnavajmo notranjost topološkega izolatorja kot vakuum. Ko prečkamo površino, se pravokotna komponenta električnega polja spremeni za $\Delta E_\perp = -\alpha c B_\perp$, vzdolžna komponenta magnetnega polja pa za $\Delta B_\parallel = \alpha E_\parallel / c$, kjer je c hitrost svetlobe in α konstanta fine strukture. Poleg tega je $\Delta B_\perp = 0$ in $\Delta E_\parallel = 0$. Nad razsežno ravno površino topološkega izolatorja namestimo točkast delec z električnim nabojem e.

a) Elektromagnetno polje na vsaki strani površine je potem mogoče opisati z zrcalnim delcem, in sicer s po enim za vsako stran površine. Utemelji, zakaj mora vsak zrcalni delec imeti tako električni kot magnetni naboj. Takšnim delcem pravimo dioni.

b) Pokaži, da imata zrcalna delca enaka električna naboja, a nasprotno enaka magnetna naboja.

c) Določi električna in magnetna naboja zrcalnih delcev in pokaži, da razmerje velikosti električnega in magnetnega naboja za vsak zrcalni delec znaša $\alpha/(2c)$.

Rešitev:

a) Če bi imel zrcalni delec le električni naboj, na površini ne bi bilo magnetnih polj. Prvega robnega pogoja potem ne bi mogli izpolniti.

b) Dion kot zrcalna slika originalnega delca naj ima električni naboj e_2 in magnetni naboj g_2, nahaja naj se pod površino, z njim pa, poleg originalnega delca, opišemo elektromagnetno polje *nad* površino. Drugi dion kot zrcalna slika prvega diona naj ima naboja e_1 in g_1, nahaja naj se nad površino, na mestu originalnega delca, z njim pa opišemo elektromagnetno polje *pod* površino. Polji diona z nabojema $e_{1,2}$ in $g_{1,2}$ zapišemo kot

$$E = \frac{e_{1,2}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{in} \quad B = \frac{\mu_0 g_{1,2}}{4\pi r^2}.$$

Od katerekoli točke površine so vsi trije delci, torej originalni delec in oba diona, enako oddaljeni. Ker poleg tega vsak robni pogoj povezuje le istovrstne (torej vzdolžne ali pravokotne) komponente obeh polj, se pri zapisu robnih pogojev s poljema točkastih nabojev koordinatni predfaktor vedno pokrajša. Če prostor nad površino označimo z indeksom 1, prostor pod površino pa z indeksom 2, se štirje robni pogoji takole prepišejo:

$$\begin{aligned}
E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = -\alpha c B_{\perp 1,2} \quad &\Longrightarrow \quad (e_2 - e) - (-e_1 - e) = -\frac{\alpha}{c}(-g_1),\\
B_{\parallel 1} - B_{\parallel 2} = \frac{\alpha}{c} E_{\perp 1,2} \quad &\Longrightarrow \quad g_2 - g_1 = \alpha c (e + e_2),\\
B_{\perp 1} - B_{\perp 2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -g_1 - g_2 = 0,\\
E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad (e_1 + e) - (e_2 + e) = 0.
\end{aligned}$$

Spotoma smo upoštevali še $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Iz zadnjih dveh enačb takoj sledi $e_1 = e_2$ in $g_1 = -g_2$.

c) Sicer pa smo pod b) zapisali natanko sistem štirih enačb za štiri neznanke e_1, e_2, g_1 in g_2. Rešitve ni težko najti:

$$e_1 = e_2 = -\frac{\alpha^2}{4+\alpha^2}e \quad \text{in} \quad g_1 = -g_2 = -\frac{2\alpha}{4+\alpha^2}ce,$$

od koder sledi tudi $e_1/g_1 = -e_2/g_2 = \alpha/(2c)$.