Elektromagnetno polje: 2. kolokvij, rešitve nalog

(21. 1. 2014 ob 10:00)

asistent: Martin Klanjšek, telefon: 01 477 3866, email: *martin.klanjsek@ijs.si*

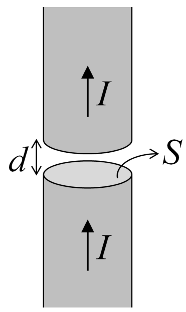
1. naloga

Dolg raven valjasti vodnik preseka S je na nekem mestu prekinjen. Prekinitev ima obliko ozke špranje širine d pravokotne na vodnik (glej sliko). Ob času $t = 0$ po vodniku spustimo konstanten električni tok I, zaradi katerega se na zgornji in spodnji meji špranje začne nabirati naboj.

a) Določi smer in velikost jakosti električnega polja ter gostote magnetnega polja v špranji v oddaljenosti r od osi vodnika ob času t.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj moč, ki ob času t priteka v špranjo.

c) Prejšnji rezultat primerjaj s časovnim odvodom energije električnega polja v špranji.



Pri vseh računih zanemari popačitev polj ob zunanjem robu špranje. Špranjo torej obravnavaj kot ploščati kondenzator. Upor vodnika zanemari.

Rešitev:

a) Do časa t se na robovih špranje nabere naboj $e = It$, ki ga lahko izrazimo tudi kot $e = CU$, kjer je $C = \varepsilon_0 S/d$. Iz tega sledi $U = Itd/(\varepsilon_0 S)$ in končno

$$E(t) = \frac{U}{d} = \frac{I}{\varepsilon_0 S} t.$$

Električno polje je homogeno, torej neodvisno od r, in kaže v smeri $\hat{e}_z$. Zaradi spreminjajočega se električnega polja je v špranji premikalni tok $\varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$, za katerega velja

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad B \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{I}{\varepsilon_0 S} \cdot \pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2S} r,$$

kjer smo Maxwellovo enačbo s premikalnim tokom sprva prepisali v integralsko obliko. Magnetno polje je neodvisno od časa, je pa zato odvisno od r in kaže v smeri $\hat{e}_\varphi$.

b) Iz zgornjih dveh izrazov za E in B dobimo Poyntingov vektor

$$\vec{P}(r,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = -\frac{I^2}{2\varepsilon_0 S^2} rt\, \hat{e}_r,$$

ki je odvisen tako od t kot r. Negativni predznak pomeni, da moč priteka v špranjo. Moč ob času t dobimo, če $\vec{P}(r,t)$ integriramo po valjastem obodu špranje pri $r = a$ (kjer velja $S = \pi a^2$):

$$\oint \vec{P}(a,t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -P(a,t) \cdot 2\pi a d = -\frac{I^2 d}{\varepsilon_0 S} t.$$

Ker ima $\vec{P}(r,t)$ radialno smer, zgornji in spodnji rob špranje k integralu namreč ne prispevata.

c) Energija električnega polja v špranji ob času t je $W_e(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(t) \cdot Sd$, pri čemer smo $E(t)$ izračunali zgoraj. Njen časovni odvod je potem

$$\frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}t} = \frac{I^2 d}{\varepsilon_0 S} t,$$

kar je po velikosti ravno enako v špranjo pritekajoči moči, kakor pričakujemo v skladu s Poyntingovim izrekom.

2. naloga

Določi jakost električnega polja, ki ga povzroča dolg valj polmera a s homogeno konstantno polarizacijo $\vec{P}$, ki je pravokotna na os valja. Rezultat zapiši tako za notranjost kot za zunanjost valja.

Vzdolžno homogene rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\varphi) = 0$ v cilindričnih koordinatah:

$$U(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m r^m + B_m r^{-m}\right) \left[C_m \cos(m\varphi) + D_m \sin(m\varphi)\right].$$

Rešitev:

Zaradi polarizacije valja so na njegovi površini vezani naboji s površinsko gostoto $\sigma_v = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos\varphi$, kjer je $\vec{n}$ normala površine pri polarnem kotu φ. Ker so to edini naboji, ki ustvarjajo iskano električno polje, mora potencial tega polja imeti enako kotno odvisnost. Zato v zgoraj podani rešitvi preživita le člena s $\cos\varphi$:

$$U(r,\varphi) = \begin{cases} A\frac{a}{r}\cos\varphi & r > a, \\ B\frac{r}{a}\cos\varphi & r < a, \end{cases}$$

kjer smo vpeljali novi konstanti A in B z enoto potenciala. Ker snov, iz katere je valj, zdaj opisujemo z vezanimi naboji namesto s polarizacijo, je edino relevantno polje $\vec{E} = -\nabla U = -(\partial U/\partial r)\hat{e}_r - (\partial U/r\partial\varphi)\hat{e}_\varphi$. Robna pogoja na obodu valja se glasita:

$$E_\varphi^A = E_\varphi^B \quad \text{in} \quad E_r^A - E_r^B = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_0}.$$

Ko upoštevamo zgornjo zvezo med posameznima komponentama $\vec{E}$ in U, iz prvega robnega pogoja dobimo $A = B$, iz drugega pa $A + B = Pa/\varepsilon_0$, torej $A = B = Pa/(2\varepsilon_0)$. Potencial električnega polja je torej

$$U(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{Pa^2}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\varphi}{r} & r > a, \\ \frac{P}{2\varepsilon_0} r\cos\varphi = \frac{P}{2\varepsilon_0}x & r < a. \end{cases}$$

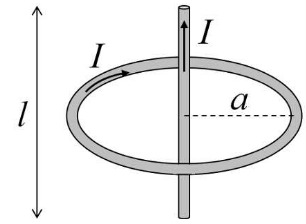
Jakost električnega polja je potem

$$\vec{E}(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{Pa^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\hat{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r^2}\hat{e}_\varphi\right) & r > a, \\ -\frac{P}{2\varepsilon_0}\hat{e}_x & r < a. \end{cases}$$

Električno polje znotraj valja je homogeno in nasprotno polarizaciji.

3. naloga

Za oddajanje krožno polariziranega valovanja lahko uporabimo anteno v obliki nesklenjene vodoravne krožne zanke z navpičnima koncema (glej sliko). Predpostavi, da je antena *majhna* v primerjavi z valovno dolžino λ valovanja, ki ga oddaja. Potem jo lahko obravnavamo kot kombinacijo vodoravne krožne zanke polmera a in navpične prečke dolžine l, ki simetrično prebada zanko (glej sliko). Anteno napajamo z električnim tokom $I = I_0 \sin \omega t$.



a) Določi električni in magnetni dipolni moment takšne antene kot funkcijo časa t.

b) Pokaži, da je v poljubni smeri valovanje, ki ga takšna antena oddaja, eliptično polarizirano.

c) Kako moramo izbrati l pri danem a in dani valovni dolžini λ, da bo valovanje res krožno polarizirano?

V sevalnem približku je gostota magnetnega polja nihajočega električnega dipola p_e v oddaljenosti r od dipola podana kot $\vec{B}_e = \frac{\mu_0 \sin \vartheta}{4\pi c r} \ddot{p}_e(t - \frac{r}{c}) \hat{e}_\varphi$, ustrezni rezultat za magnetni dipol p_m pa je $\vec{B}_m = \frac{\mu_0 \sin \vartheta}{4\pi c^2 r} \ddot{p}_m(t - \frac{r}{c}) \hat{e}_\vartheta$, kjer je c hitrost svetlobe, ϑ in φ sta smerna kota, $\hat{e}_\vartheta$ in $\hat{e}_\varphi$ pa enotska smerna vektorja v krogelnih koordinatah, kjer ustrezni dipol kaže vzdolž osi z.

Rešitev:

a) K električnemu dipolnemu momentu prispeva le prečka, in sicer je $\dot{p}_e(t) = \dot{e}(t) l = I(t) l = I_0 \sin(\omega t) l$, se pravi $p_e(t) = -(I_0 l/\omega) \cos \omega t$. K magnetnemu dipolnemu momentu prispeva le krožna zanka, kjer pa je preprosto $p_m(t) = -I(t) S = -I_0 \pi a^2 \sin \omega t$, predznak pa odraža smer toka v zanki oziroma sučnost antene (navoj na sliki gre namreč v negativno smer). Oba momenta kažeta vzdolž prečke, torej v smeri $\pm \hat{e}_z$.

b) Iz zgornjih dveh izrazov dobimo $\ddot{p}_e = I_0 \omega l \cos \omega t$ in $\ddot{p}_m = I_0 \pi a^2 \omega^2 \sin \omega t$, kar vstavimo v podana izraza za $\vec{B}_e$ in $\vec{B}_m$. Za celotno magnetno komponento sevalnega polja antene v smeri (φ, ϑ) tako dobimo

$$\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 \sin \vartheta}{4\pi c r} I_0 \omega l \left(\hat{e}_\varphi \cos \omega t_r + \hat{e}_\vartheta \frac{\pi a^2 \omega}{c l} \sin \omega t_r \right),$$

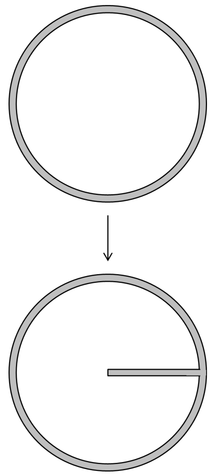
kjer smo vpeljali $t_r = t - r/c$. Komponenti polja v med seboj pravokotnih smereh $\hat{e}_\varphi$ in $\hat{e}_\vartheta$, ki sta pravokotni na smer razširjanja valovanja $\hat{e}_r$, očitno nihata s fazno razliko $\pi/2$ ($\cos \omega t_r$ in $\sin \omega t_r$). Vektor $\vec{B}(r,t)$ potemtakem na danem mestu r v časovnem poteku opisuje elipso, valovanje pa je eliptično polarizirano.

c) Da bo valovanje kar krožno polarizirano, morata biti amplitudi pred $\cos \omega t_r$ in $\sin \omega t_r$ enaki, torej

$$\frac{\pi a^2 \omega}{c l} = 1 \quad \Longrightarrow \quad l = \frac{2\pi^2 a^2}{\lambda},$$

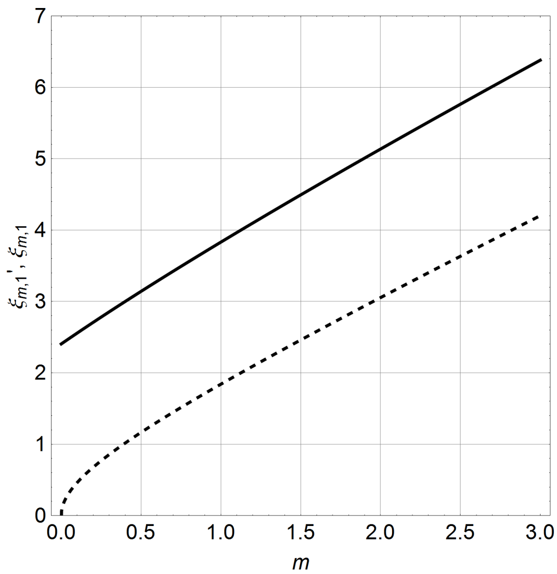
pri čemer smo upoštevali še $\omega/c = 2\pi/\lambda$.

4. naloga (dodatna)



Minimalno frekvenco širjenja elektromagnetnih valov po danem valovnem vodniku znižamo tako, da znotraj vodnika po celi dolžini dodamo tanko kovinsko pregrado, ki je na enem robu sklenjena z notranjim robom vodnika. (Na ta način povečamo "pasovno širino" valovnega vodnika.) Izračunaj, za kolikšen faktor se spremeni minimalna frekvenca *osnovnega* TM in TE načina v cilindričnem valovnem vodniku, če vanj dodamo pregrado širine polmera cilindra, ki je pravokotna na notranji rob cilindra (slika prikazuje, kako se pri tem spremeni presek vodnika). Kateremu izmed osnovnih načinov se frekvenca zniža?

Desni graf prikazuje najmanjšo (prvo) ničlo Besslove funkcije $J_m(x)$, $\xi_{m,1}$ (polna črta), in najmanjšo (prvo) ničlo odvoda $J'_m(x)$, $\xi'_{m,1}$ (črtkana črta), obe v odvisnosti od m. Ničle, ki jih potrebuješ za izračun, preprosto odčitaj z grafa.



Rešitev:

Rešitve valovne enačbe za $E_z(r,\varphi)$ in $H_z(r,\varphi)$ v valjni geometriji imajo v splošnem obliko

$$\{E_z, H_z\}(r,\varphi) = \sum_m \underbrace{J_m(\kappa_{mn} r)}_{R(r)} \underbrace{(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)}_{\Phi(\varphi)},$$

kjer je $\hat{e}_z$ smer razširjanja valovanja, možne vrednosti za m in n pa dobimo iz robnih pogojev. Frekvence valovanja potem dobimo iz disperzijske relacije $\omega(k_z) = c\sqrt{k_z^2 + \kappa_{mn}^2}$. Najnižjo frekvenco za dani način dobimo pri $k_z = 0$, če izberemo najnižjo vrednost κ_{mn}, ki je skladna z danimi robnimi pogoji: $\omega_{\min} = \omega(0) = c\kappa_{\min}$.

Najprej si poglejmo TM način, kjer je $H_z = 0$ in $E_z \neq 0$, na robu vodnika pa mora veljati $E_z = 0$. V primeru brez pregrade mora biti kotni del periodičen, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, od koder sledi $m = 0, 1, 2, \ldots$ V primeru s pregrado pa je $E_z(r, \varphi = 0) = E_z(r, \varphi = 2\pi) = 0$, torej $\Phi(0) = 0$ in $\Phi(2\pi) = 0$. Iz prvega pogoja sledi $A_m = 0$, mogoči so torej le $\sin m\varphi$, iz drugega pogoja pa potem $m = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ Vrednost $m = 0$ bi vodila do trivialno ničelnih polj. Za radialni del pa iz $E_z(r = a) = 0$, kjer je a polmer vodnika, sledi $J_m(\kappa_{mn} a) = 0$, in sicer tako za primer brez pregrade, kakor za primer s pregrado. Torej je $\kappa_{mn} = \xi_{mn}/a$, kjer je ξ_{mn} n-ta ničla m-te Besslove funkcije. V primeru brez pregrade torej dobimo najnižjo frekvenco pri $\kappa_{0,1} \approx 2.4$, v primeru s pregrado pa pri $\kappa_{1/2,1} \approx 3.1$. Z vnosom pregrade se torej najnižja frekvenca *zviša*, in sicer za faktor $\kappa_{1/2,1}/\kappa_{0,1} \approx 1.3$.

Pri TE načinu pa je $E_z = 0$ in $H_z \neq 0$, na robu vodnika pa mora veljati $\partial H_z/\partial r = 0$ za obod oziroma $\partial H_z/\partial\varphi = 0$ za morebitno pregrado. Tako v primeru s pregrado, kakor v primeru brez pregrade, za radialni del iz $(\partial H_z/\partial r)(r = a) = 0$ sledi $J'_m(\kappa_{mn}a) = 0$. Torej je $\kappa_{mn} = \xi'_{mn}/a$, kjer je ξ'_{mn} n-ta ničla odvoda m-te Besslove funkcije. V primeru s pregrado je kotni del spet periodičen, $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$, od koder sledi $m = 1, 2, 3, \ldots$, kjer pa vrednost $m = 0$ ne pride več v poštev, saj $\xi'_{0,1} = 0$ vodi do trivialno ničelnih polj. V primeru s pregrado pa je $(\partial H_z/\partial\varphi)(r, \varphi = 0) = (\partial H_z/\partial\varphi)(r, \varphi = 2\pi) = 0$, torej $\Phi'(0) = 0$ in $\Phi'(2\pi) = 0$. Iz prvega pogoja sledi $B_m = 0$, mogoči so torej le $\cos m\varphi$, iz drugega pogoja pa potem spet $m = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ Vrednost $m = 0$ bi spet vodila do trivialno ničelnih polj. V primeru brez pregrade torej dobimo najnižjo frekvenco pri $\kappa'_{1,1} \approx 1.85$, v primeru s pregrado pa pri $\kappa'_{1/2,1} \approx 1.15$. Z vnosom pregrade se torej najnižja frekvenca *zniža*, in sicer na $\kappa'_{1/2,1}/\kappa'_{1,1} \approx 0.62$ prvotne vrednosti.