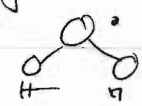
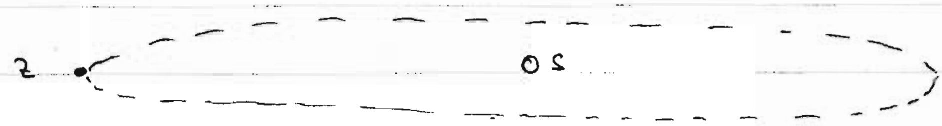
1. MEHANIKA TOČKASTEGA TELESA

Kaj je točkasto telo: to je telo, ki je mnogo manjši od razdalj v sistemu, v katerem to telo opazujemo.

Primer: Zemlja v vesolju; molekula 



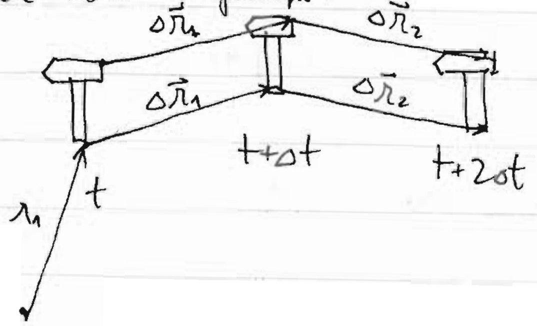
Razsežnosti Zemlje so mnogo manjše od razdalj v Sončnem sistemu. Zaradi tega Zemljo obravnavamo kot točkasto telo, ko študiramo njeno gibanje v vesolju. Nasprotno pa Zemlje ne moremo jemati kot točkasto telo, ko študiramo npr. gibanje satelitov ali pa ozračja nad zemeljsko površino.
Mehanika je del fizike, ki opisuje način, na katere se telo giblje v prostoru in obravnava vzroke za gibanje teles.

1.1. Kinematika

Kinematika opisuje gibanje teles, ne pa vzrokov za njihovo gibanje. Kinematika predstavlja "zbirko" matematičnih orodij, s katerimi opisujemo gibanje teles. Vsako gibanje teles lahko sestavimo iz dveh osnovnih gibanj: translacija telesa in rotacija:

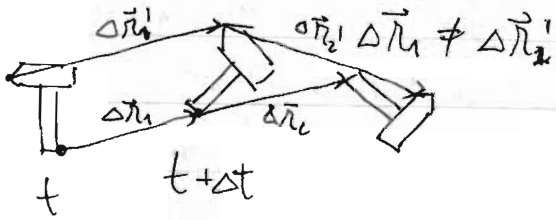
Translacija telesa: za opis gibanja vseh točk telesa je dovolj, če poznamo gibanje ene same točke telesa:

Primer translac. gibanja:



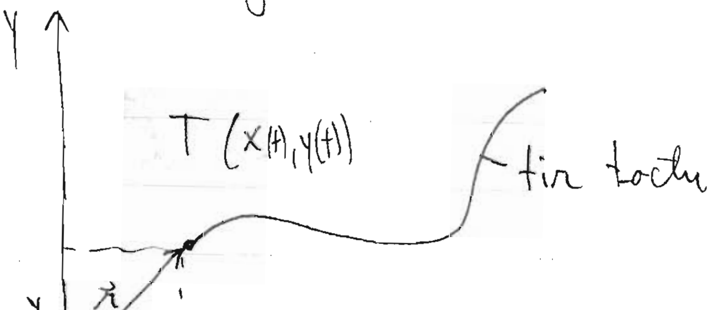
očitno za translacijsko gibanje telesa potrebujem podatke za gibanje ene same točke telesa. Vse ostale se gibljejo na enak način

Primer translacije in rotacije telesa:



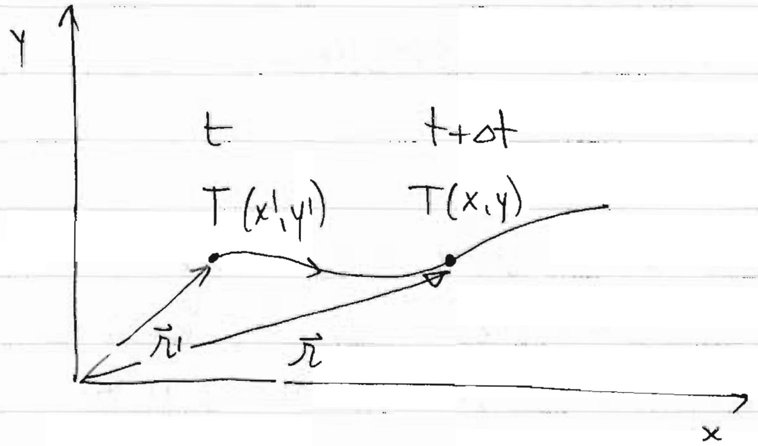
Različnim točkam telesa pripadajo različni vektorji, ki so

Kaj ~~opi~~ potrebujemo za opis gibanja točkastega telesa: Koordinatni sistem. V tem sistemu ob vsakem času poznamo krajevni vektor $\vec{r}(t)$, ki opisuje trenutno lego telesa. V splošnem je to (x, y, z) koordinatni sistem v treh razsežnostih, zaradi enostavnosti pa si poglejmo v 2 dimenzijah:



$\boxed{\vec{r} = (x, y)}$

Krajevni vektor točke določa njeno lego.

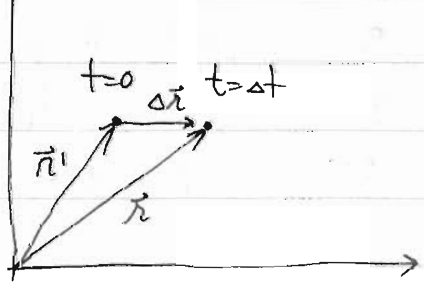


Vse koordinate točke so v splošnem neke funkcije časa, ki jih podam:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$ funkcije časa, ker se telo premika.

Pri gibanju teles definiramo poleg krajevnega vektorja še dve pomembni količini: hitrost telesa $\vec{v}$ in pospešek telesa $\vec{a}$.

Hitrost: je posledica gibanja telesa in spreminjanja krajevnega vektorja $\vec{r}$: naj se v času Δt točka premakne iz $\vec{r}\,'$ v $\vec{r}$:



$\vec{r}\,'$ .... krajevni vektor ob $t=0$
$\vec{r}$ .... krajevni vektor ob malo kasnejšem času $t=\Delta t$

To je vektor povprečne hitrosti

Pogledam kvocient $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\Delta t}$. Opisuje spremembo krajevnega vektorja v danem času. Če vzamem limitni primer; $\Delta t \to 0$, dobim hitrost telesa:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

tangenta na tir v dani točki

Znak $\frac{d}{dt}$ označuje matematično operacijo odvajanja količine po času. Izračunali smo torej fizikalno količino, to je hitrost, ki pa odvod funkcije po času. Zakaj je to pomembno? Zato ker lahko pri izračunih uporabljamo matematično operacijo odvoda zvezni funkciji. To si bomo ogledali na primeru kasneje.

Ilustracija, da takšna limita zares obstaja: vzemimo delec, ki je bil ob času $t_1 = 1\,s$ pri $x_1 = 100\,cm$. Za ostale čase pa velja:

naredi

x_1 [cm]	t_1 [s]	x_2 [cm]	t_2 [s]	$\Delta x = x_2 - x_1$	$\Delta t = t_2 - t_1$	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\left[\frac{cm}{s}\right]$
100	1	200	11	100	10	+10
		180	9,6	80	8,6	+9,3
		160	7,9	60	6,9	+8,7
		140	5,9	40	4,9	+8,2
		120	3,56	20	2,56	+7,8
		110	2,33	10	1,33	+7,5
		105	1,69	5	0,69	+7,3
		103	1,42	3	0,42	+7,1
		101	1.14	1	0.14	+7,1

Vidimo, da zares dobimo limitno vrednost, če vzamemo dovolj kratek časovni interval $\Delta t = t_2 - t_1$

Hitrost je torej v splošnem vektor, ki ima velikost in smer.
Enota za hitrost je $[m s^{-1}]$.

Primer: Lega točke je podana s koordinatama

$$x(t) = a \cdot \cos\omega t$$
$$y(t) = a \sin\omega t$$

Izračunaj hitrost telesa

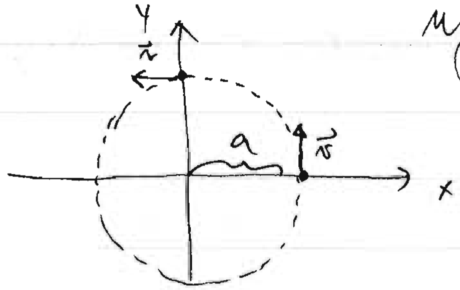
$$\vec{r} = (x(t), y(t)) \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (v_x, v_y)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin\omega t$$

$$\vec{v} = a\omega(-\sin\omega t, \cos\omega t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cdot \cos\omega t$$

Gre za kroženje telesa. Hitrost, t.j. njena smer, se spreminja s časom. Kaj pa velikost?



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2\omega^2(\underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{1})} = a \cdot \omega$$

$v = a \cdot \omega$; je konstantna, odvisna samo od polmera kroženja a in kotne hitrosti ω.

To je znana lastnost ~~iz~~ kroženja teles.

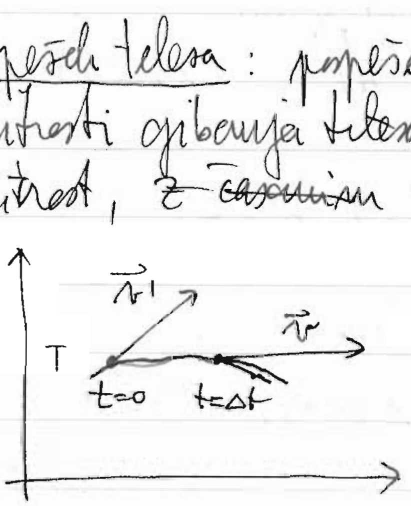
Primer: telo se giblje v smeri x, tako da je $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + b\cdot t$
Kako se njegova hitrost spreminja s časom?

$\vec{v} = (v_x, 0, 0)$ $\qquad v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}at^2 + bt\right) = a t + b$

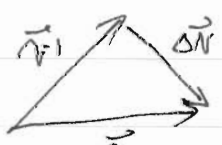
$\boxed{v = b + a\cdot t}$ hitrost linearno raste od vrednosti b pri $t=0$.

Gre za enakomerno pospešeno gibanje.

Pospešek telesa: pospešek telesa označuje ~~sp~~ časovno spremembo hitrosti gibanja telesa. Pospešek definiramo, podobno kot hitrost, ~~z časovnim~~ z razliko hitrosti telesa v časovni enoti.



Telo se je premaknilo, spremenila pa se je tudi njegova hitrost. Definiram razliko hitrosti



$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}'$ razlika hitrosti v času Δt.

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

pospešek telesa povezan s časovnim odvodom hitrosti telesa. To je zopet pomembno, ker lahko uporabim vsa pravila, ki jih poznamo za operacijo odvajanja.

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$$

Primer: izračunaj pospešek telesa, če se giblje po koordinatah:

$$x(t) = \cancel{a \cos\omega t}\ a \cdot \cos\omega t$$
$$y(t) = \cancel{a \cos\omega t}\ a \cdot \sin\omega t$$

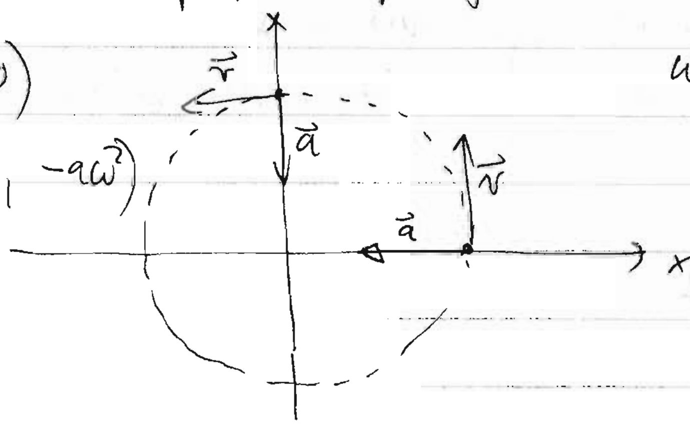
$$\cancel{\vec{v} = (a\omega \cos\omega t}\quad \vec{v} = (-a\omega \sin\omega t,\ a\omega \cdot \cos\omega t)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-a\omega \sin\omega t,\ a\cdot\omega \cos\omega t) =$$
$$= (-a\omega^2 \cos\omega t,\ -a\omega^2 \sin\omega t) = -a\omega^2(\cos\omega t,\ \sin\omega t)$$

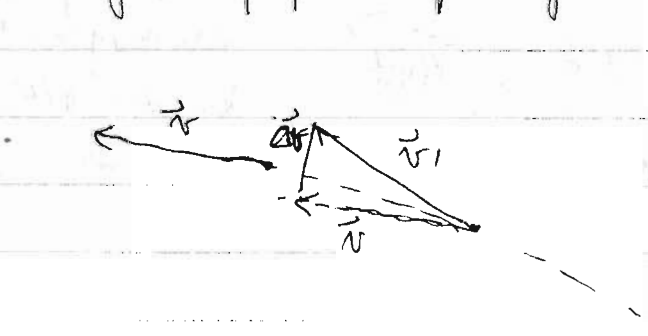
Poglejmo, kako se ta pospešek spreminja. Ob $\omega t = 0$

$$\vec{a}(0) = (-a\omega^2, 0)$$
$$\vec{a}(\omega t = \pi/2) = (0, -a\omega^2)$$

$\omega t = \pi/2$



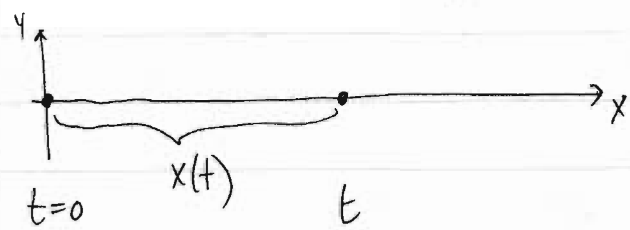
Pospešek pri kroženju vedno kaže v smeri proti središču kroženja. To je centripetalni pospešek, ki povzroča kroženje. Ta pospešek spreminja smer hitrosti telesa



1.1.1. Premo enakomerno gibanje v 3D

Tir gibanja je premica (premo gibanje). Hitrost takega gibanja je konstantna (enakomerno gibanje).
Koordinatni sistem vedno lahko tako zasučem, da se telo giblje vzdolž ene od osi, naprimer x.

$\vec{v} = (v, 0, 0)$; velja $v = \frac{dx}{dt} = \text{konst}$



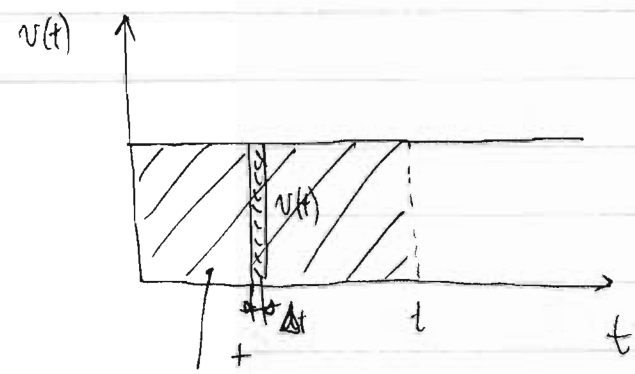
Vemo: $x(t) = v \cdot t$, pot narašča sorazmerno s časom. To lahko dobimo tudi na splošen način, z integralom.

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$dx = v \cdot dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v \cdot dt = v \cdot \int_0^t dt$$

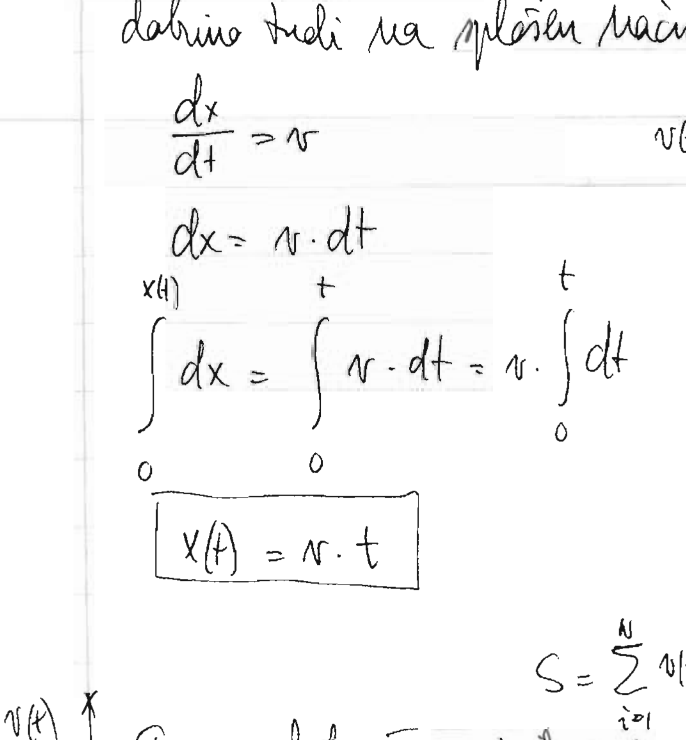
$$\boxed{x(t) = v \cdot t}$$



$x(t) = \int_0^t v\, dt$; določen integral predstavlja površino pod krivuljo $v(t)$

$$S = \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\Delta t_i \rightarrow \int_0^t v(t)\,dt$$

Pomen določenega integrala: seštevanje majhnih prispevkov.

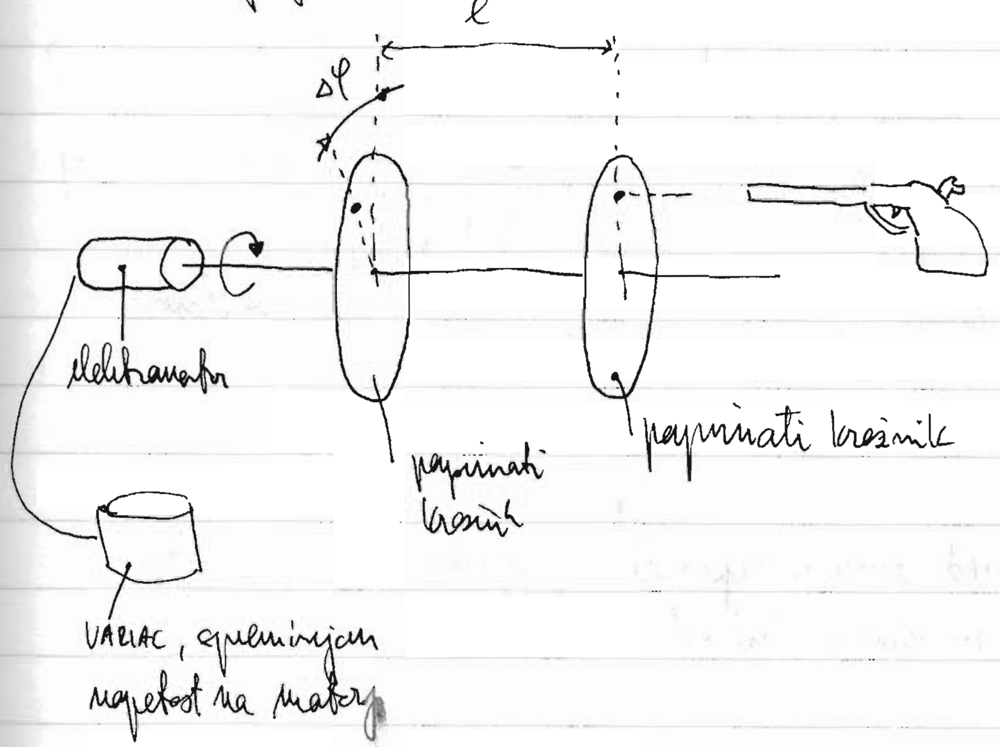


$$\Delta x_i = v(t_i) \cdot \Delta t_i$$

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} v(t_i) \cdot \Delta t_i \qquad \Delta t_i \rightarrow dt$$

$$\lim_{N\to\infty} S = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} v(t_i)\,\Delta t_i = \int_0^t v(t)\,dt$$

Primer merjenja hitrosti izstrelka:



Hitrost izstrelka se sicer spreminja s časom zaradi zračnega upora, vendar je na tako kratki razdalji praktično konstantna. Če hočem določiti hitrost, moram poznati pot in čas, v katerem telo prepotuje dano pot.

$$v_{krogle} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t}$$

l .... razdalja med krožnikoma
Δt .... časovni presledek, v katerem izstrelek prepotuje pot l.

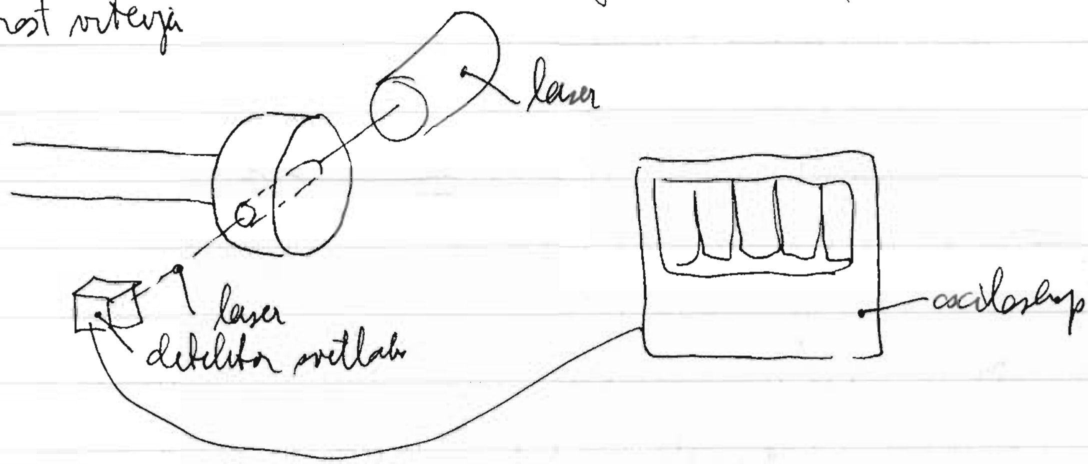
Čas Δt dobimo posredno preko meritve kota $\Delta\varphi$. Vrtenje je enakomerno, torej se kot zasuka narašča linearno s časom:

$$\varphi(t) = \omega \cdot t \quad ; \quad \Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = 2\pi \cdot \nu \cdot \Delta t$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{2\pi\nu}}$$

merim $\Delta\varphi$, poznati moram še $\nu = \frac{1}{t_0}$, to pa je čas za 1 obrat.

Obhodni čas plošče izmerimo s pomočjo merilca, ki meri hitrost vrtenja



Izmerim čas med dvema zaporednima pulzoma in dobim $\frac{1}{2}t_0$.
Na ta način izračunam hitrost krogle.

1.1.2. Premo, enakomerno pospešeno gibanje

Pri premem enakomerno pospešenem gibanju je tir premica, pospešek telesa je konstanten.

$\vec{a} = (a_x, 0, 0) = (a, 0, 0)$ koord. sistem zasučen, tako da tir sovpada z osjo x

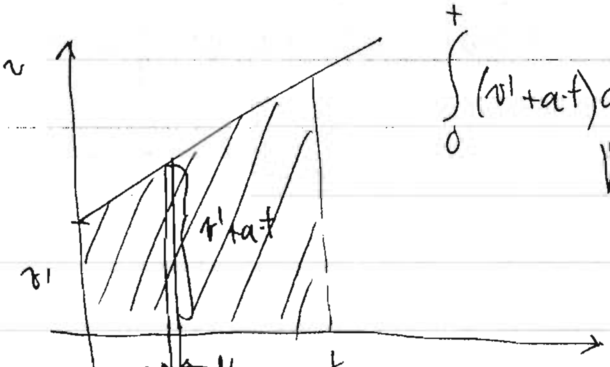
$$a = \frac{dv}{dt} \qquad dv = a \cdot dt$$

$$\int_{v'}^{v} dv = \int_0^t a \cdot dt$$

$$v\Big|_{v'}^{v} = a \cdot t\Big|_0^t$$

$\cancel{v = a \cdot t + v'}$ hitrost linearno narašča s časom

$$\boxed{v = v' + a \cdot t}$$



$$\int_0^t (v' + a \cdot t)\,dt = \text{površina pod krivuljo } v(t)$$

Sedaj pa že vemo, kako izračunamo pot kot funkcijo časa:

$$v = \frac{dx}{dt} = v' + a \cdot t \qquad \int_0^x dx = \int_0^t v' \cdot t + a\int_0^t t \cdot dt$$

$$\frac{dx}{dt} = v' + a \cdot t$$

$$dx = v'dt + a \cdot t\,dt \qquad \boxed{x = v' \cdot t + \frac{1}{2}at^2}$$

pot narašča s kvadratom časa

Poiščemo še zvezo med v, a in x

$$v = v' + a\cdot t \Rightarrow t = \frac{v-v'}{a}$$

$$x = v'\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2 = v'\,\frac{v-v'}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v-v'}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{\cancel{v}v'}{\cancel{a}} - \frac{v'^2}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{a} - \frac{\cancel{vv'}}{\cancel{a}} + \frac{1}{2}\frac{v'^2}{a} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{a} - \frac{1}{2}\frac{v'^2}{a}$$

$$2a\cdot x = v^2 - v'^2 \Rightarrow \boxed{v^2 = v'^2 + 2a\cdot x}$$

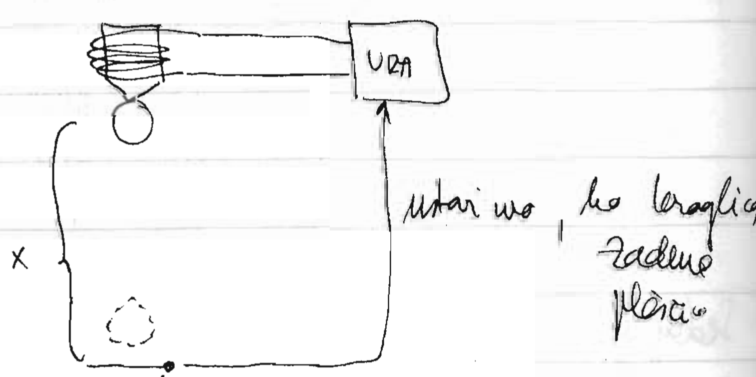
Primer enakomerno pospešenega gibanja: prosti pad teles

$$a = g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Poskus z evakuirano cevjo:

Poskus s kroglicami na vrvici:

Poskus merjenja pospeška pri prostem padu:



$s = 1\,\mathrm{m}$

Poskus št	$t\,[\mathrm{s}]$	$g\,[\mathrm{m\,s^{-2}}]$
1	0,45 s	
2		
3		

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}g\cdot t^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{g = \frac{2x}{t^2}}$$

Primer splošnega gibanja: Čoln, ki se giblje s hitrostjo $4 m s^{-1}$ se ustavi motor. Kolikšno pot naredi v naslednjih 10 s, če velja za pojemek enačba $a = -kv^2$, s koeficienta $k = 0{,}65 m^{-1}$. Kolikšna je hitrost čolna po 10 s?

$v' = 4 m s^{-1}$

$a = -k \cdot v^2$ se spreminja s hitrostjo (upor sredstva)

$k = 0{,}65 m^{-1}$

$v(t = 10 s) = ?$

$s(t = 10 s) = ?$

$$a = -k \cdot v^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -k \cdot v^2$$

$$\frac{dv}{v^2} = -k \cdot dt$$

$$\int_{v'}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = -k \int_0^t dt = -k \cdot t$$

$$\int v^{-2} dv = -1 \cdot v^{-1} = -\frac{1}{v}$$

$$+\frac{1}{v}\Big|_{v'}^{v} = +k \cdot t$$

$$\frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v'} = k \cdot t$$

$$\frac{1}{v(t)} = k \cdot t + \frac{1}{v'}$$

$$v(t) = \frac{1}{\frac{1}{v'} + k t} = \frac{v'}{1 + k \cdot v' t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{v'}{1 + k \cdot v' \cdot t}}$$

$t = 0 \rightarrow v(0) = v'$; O.K

$t \rightarrow \infty$ $v(\infty) \rightarrow 0$; O.K.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v'}{1 + h \cdot v' \cdot t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v'}{1 + h \cdot v' \cdot t}$$

$$dx = \frac{v'}{1 + h \cdot v' t} dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v'}{1 + h \cdot v' t} dt$$

$$x \Big|_0^x = x = v' \cdot \int_0^t \frac{dt}{\underbrace{1 + h v' t}_{y}} =$$

$$1 + h v' t = y$$

$$h \cdot v' dt = dy$$

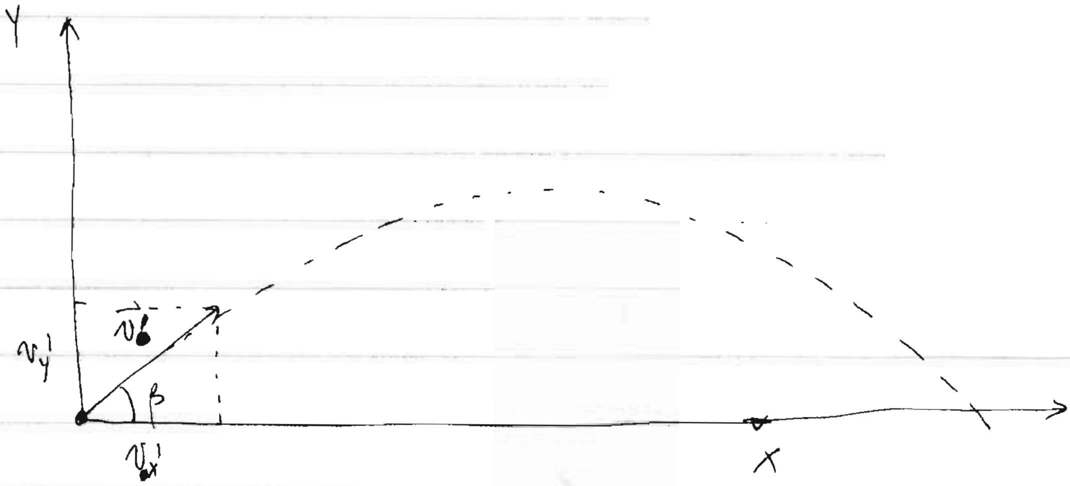
$$dt = \frac{dy}{h \cdot v'}$$

$$= \cancel{v' \int_0^t dt} = \frac{v'}{h \cdot v'} \int_1^{1 + h \cdot v' t} \frac{dy}{dy} = v' \ln y \Big|_1^{1 + h v' t} =$$

$$= \frac{v'}{h \cdot v'} \left(\ln (1 + h v' t) - \ln 1 \right) = \frac{1}{h} \cdot \ln (1 + h \cdot v' t)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{h} \cdot \ln (1 + h \cdot v' t)}$$

1.1.3. Gibanje v ravnini, poševni met



Zanima nas, po kakšni krivulji se giblje točkasto telo, ki ga vržemo pod kotom β glede na vodoravnico in ji začetna hitrost $\vec v_0$.
Kakšen je pospešek telesa?

$\vec a = (0, -g)$ smer pospeška je v smeri y, negativen je.

Začetna hitrost $\vec v' = (v_0 \cos\beta, v_0 \cdot \sin\beta)$
Vemo:

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt}$$; to zapišemo po komponentah.

x-smer $a_x = 0 = \frac{dv_x}{dt}$ gibanje v smeri x je premo enakomerno
y-smer $a_y = -g = \frac{dv_y}{dt}$ gibanje v smeri y je sprva enak. pojemajoče, nato enak. pospešeno

Sedaj že vemo:
x-smer: $v_x(t) = konst = v_0 \cdot \cos\beta$
y-smer: $dv_y = -g \cdot dt$

$$\int_{v_y'}^{v_y(t)} dv_y = \int_0^t -g\,dt$$

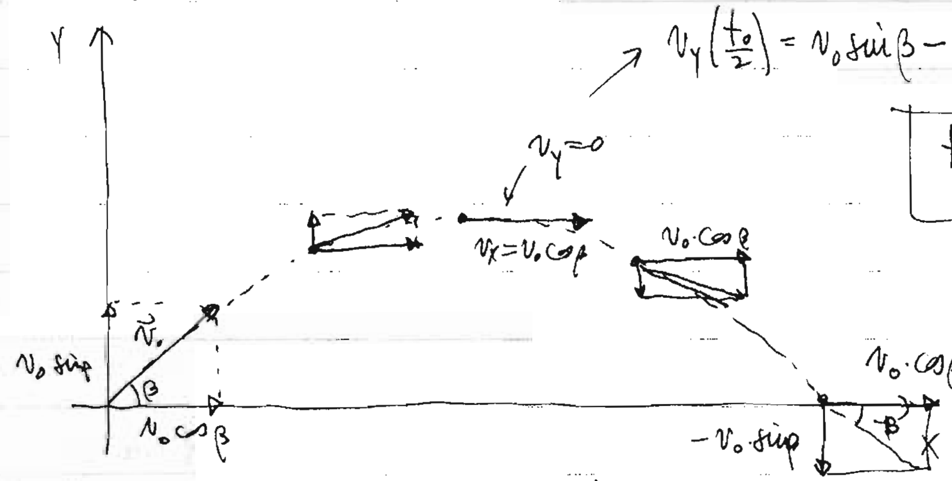
$$v_y(t) - v_0 \cdot \sin\beta = -g \cdot t$$

$$\left.\begin{aligned} v_y(t) &= v_0 \cdot \sin\beta - g \cdot t \\ v_x(t) &= v_0 \cdot \cos\beta \end{aligned}\right\}$$

Narišemo:

$v_y\left(\frac{t_0}{2}\right) = v_0 \sin\beta - g \cdot \frac{t_0}{2} = 0$ čas leta

$$\boxed{t_0 = \frac{2 v_0 \sin\beta}{g}}$$



Vidimo, da je gibanje sestavljeno iz enak. gib. v smeri x (pospešek = 0) in pospešenega gibanja v smeri y

Kolikšna je velikost hitrosti? $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$

$= \sqrt{v_0^2 \cos^2\beta + (v_0 \sin\beta - g t)^2}$ je odvisna od časa

Kako je s koordinatami?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (v_x, v_y)$$

x-smer: $v_x = v_0 \cdot \cos\beta = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 \cdot \cos\beta \cdot t}$

y - smer: $v_y = v_0 \sin\beta - g\cdot t = \frac{dy}{dt}$

$$dy = (v_0 \sin\beta - g\cdot t)\,dt$$

$$\int_0^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 \sin\beta - g t)\,dt = v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cdot \cos\beta \cdot t \\ y(t) &= v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\}$$ S tema dvema enačbama je določena lega točke.

Kakšna je ta krivulja? Hočem dobiti zvezo $y(x)$, torej moram izločiti t: iz prve enačbe sledi

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\beta} \Rightarrow y(x) = \cancel{v_0} \sin\beta \cdot \frac{x}{\cancel{v_0} \cdot \cos\beta} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\beta} =$$

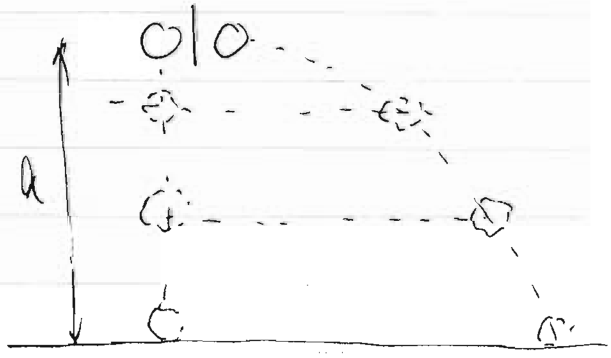
$$= \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\beta} \cdot x^2$$

$$\boxed{y(x) = \operatorname{tg}\beta \cdot x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\beta} \cdot x^2}$$

To je enačba parabole. Telo torej leti po paraboli.

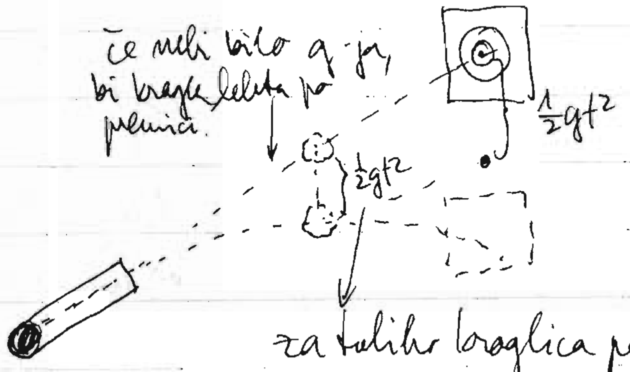
Domača naloga: Izračunaj kako daleč leti, kako je to odvisno od kota.

1. Poskus: primerjava navpičnega in poševnega meta



Obe telesi opravita enako dolgo pot v smeri navpičnice, torej morata pasti istočasno na tla.

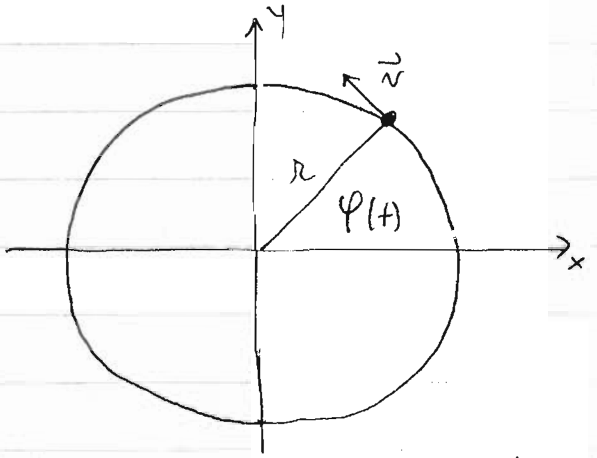
2. Poskus: streljanje v padajočo tarčo. Kam moram nameriti, da bom zadel:



za toliko kroglica pade pod premico zaradi g-ja.

1.1.4. Kroženje

Tir gibanja je krožnica. Položaj TT na krožnici opišemo s kotom $\varphi(t)$ in polmerom r:



$\vec{v}$ .... krožilna hitrost TT je tangentna na krožnico

Opis: (r, φ) polarni sistem

$(x(\varphi), y(\varphi))$ kartezične koord.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi(t) \\ y &= r\cdot\sin\varphi(t) \end{aligned}\right]$$

Razlikujemo 3 različne vrste kroženja:

i) <u>enakomerno kroženje</u>: kot $\varphi(t)$ linearno narašča s časom

$$\varphi(t) = \varphi' + \omega\cdot t$$ φ' .... začetni kot pri $t=0$

$$\omega = \frac{\varphi(t)-\varphi'}{t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\varphi}{dt}$$ ω .... kotna hitrost $[s^{-1}]$

V limiti $\Delta t \to 0$ gre $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ odvod kota $\varphi(t)$ po času.

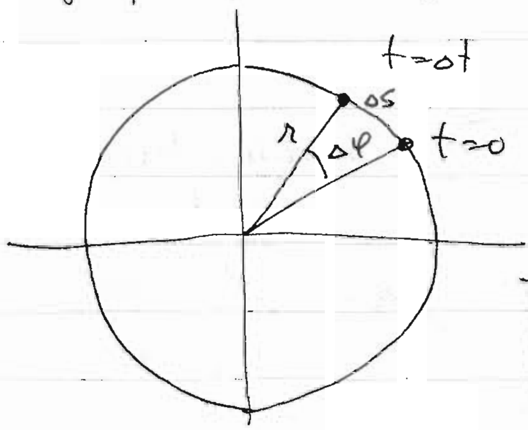
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi\nu$$

t_0 .... obhodni čas

2π .... polni kot (en obhod)

$\nu = \frac{1}{t_0}$ .... število obhodov na časovno enoto (en obhod na t_0) = frekvenca kroženja

Kako dobimo krožilno hitrost? Ker kot enakomerno narašča s časom, bo TT v enakih časih opravilo enako dolge poti (del kroga = lok dolžine s):



$$\Delta s = r \cdot \Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t \cdot r$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \omega$$

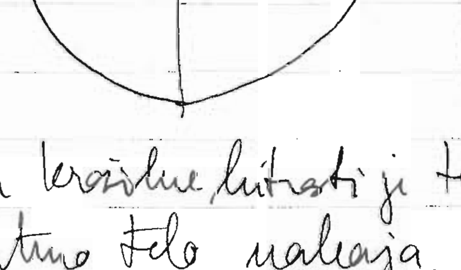
$$\boxed{v = r \cdot \omega}$$ krožilna hitrost.

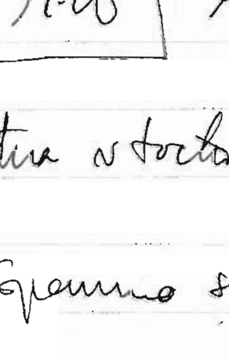
Smer krožilne hitrosti je tangenta v točki, v kateri se trenutno telo nahaja.

Kakšen je pospešek pri kroženju? Spomnimo se definicije pospeška:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$d\vec{v}$ ... sprememba hitrosti. Hitrost je sicer konstantna, vendar spreminja svojo smer!





$\sin x \approx x$

če je $x \ll 1$

Razvoj v Taylorjevo vrsto

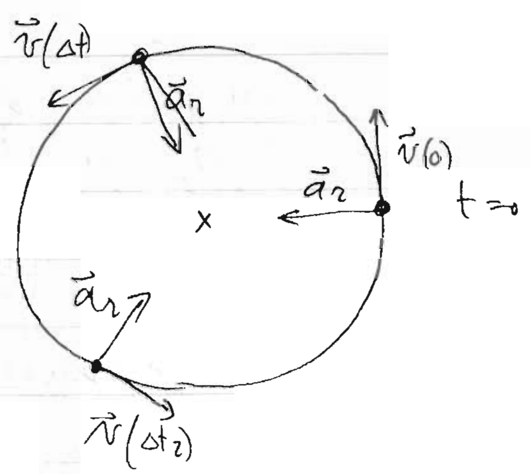
$$|d\vec{v}| \approx 2 \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \approx 2 \cdot |\vec{v}| \cdot \frac{d\varphi}{2} = |\vec{v}| \cdot d\varphi$$

$$|\vec{a}| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = |\vec{v}| \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \omega \cdot r = \omega^2 r$$

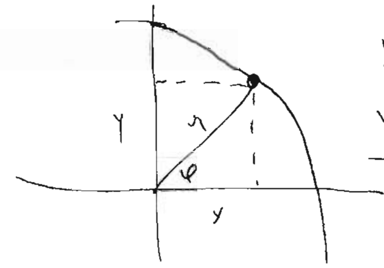
Kakšna je smer $d\vec{v}$? Je $\perp$ na $\vec{v}$, torej v smeri
proti ~~sredi~~ središču kroženja. Zato pravimo temu pospešku
radialni pospešek:

$$\boxed{a_r = \omega^2 r}$$ enota $[m s^{-2}]$, kar je v redu.

Radialni pospešek torej povzroča spremembo smeri
hitrosti $\vec{v}$!! Kako izgleda $\vec{v}(t)$ in $\vec{a}_r(t)$ ob
različnih časih:



Namesto dvojice (r, φ), lego točke
podamo tudi z dvojico (x, y):



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\varphi(t) \\ y &= r\cdot\sin\varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

ii) enakomerno pospešeno kroženje: kotna hitrost
linearno narašča s časom:

$$\omega(t) = \omega' + \alpha \cdot t$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega(t)-\omega'}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

α .... kotni pospešek (sprememba kotne hitrosti v časovni enoti)

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$ enota $[s^{-2}]$

Kako dobim $\varphi(t)$: $\boxed{\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}} \Rightarrow d\varphi = \omega(t)dt = (\omega' + \alpha t)dt$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t (\omega' + \alpha t)dt = \omega' t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \quad \boxed{\varphi(t) = \varphi' + \omega' t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2}$$ kvadratna odvisnost

Kako je s krožilno hitrostjo? Ta se bo sedaj spreminjala s časom. Še vedno velja

$$v(t) = \omega(t)\cdot r = (\omega' + \alpha\cdot t)\, r = \underbrace{r\cdot\omega'}_{v'} + \underbrace{\alpha r}_{a_T} t$$

Definiram tangentni pospešek

$$v(t) = v' + a_T t$$

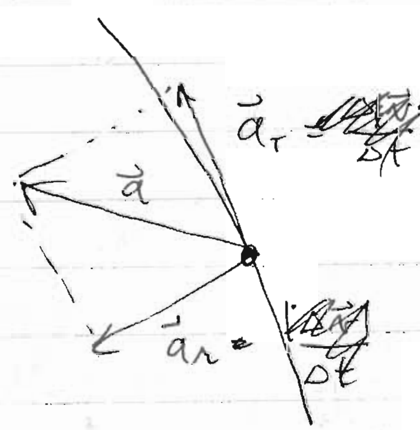
krožilna hitrost linearno narašča s časom.

$$a_T = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Tangentni pospešek pove, kako velikost krožilne hitrosti narašča s časom.

$$\boxed{a_T = \alpha\cdot r}$$

Smer a_T je tangentna, saj pove povečanje krožilne hitrosti. Pri enakomerno pospešenem kroženju imamo torej dva pospeška: tangentni in radialni:



spremeni se velikost krožilne hitrosti

spremeni se smer hitrosti

$$\vec a = \vec a_T + \vec a_r \qquad |\vec a| = \sqrt{|a_T|^2 + |a_r|^2} = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} =$$

$$= r\cdot\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

↑ raste s časom

iii) splošno pospešeno kroženje

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \dots \text{ poljubna funkcija časa } \omega(t)$$

Trenutno lego telesa dobim z integracijo:

$$d\varphi = \omega(t)\,dt$$

$$\int_{\varphi'}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega(t)\,dt$$

če poznam $\omega(t)$, z integracijo dobim $\varphi(t)$

$$\boxed{\varphi(t) = \varphi' + \int_0^t \omega(t)\,dt}$$

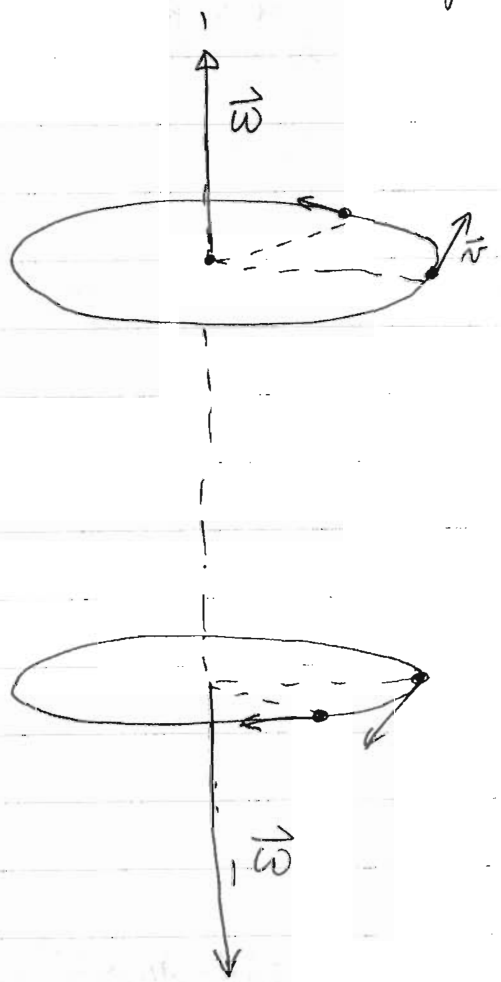
Kako pa dobim kotni pospešek:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,\omega(t) \quad \text{odvajati moram } \omega(t)$$

$$a_t = r \cdot \alpha = a_t(t) \quad \text{tangentni pospešek}$$

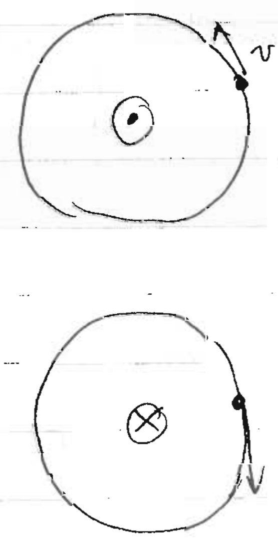
Nato pa izračunam skupni pospešek.

V prihodnjih poglavjih bomo videli, da ima kotna hitrost vektorski značaj: $\vec{\omega}$. Definicija – desno pravilo



$\vec{\omega}$ ima smer, v katero bi se pomikal desni vijak, če bi ga zavrteli v smeri vrtenja telesa

Če gledamo vzdolž $\vec{\omega}$:



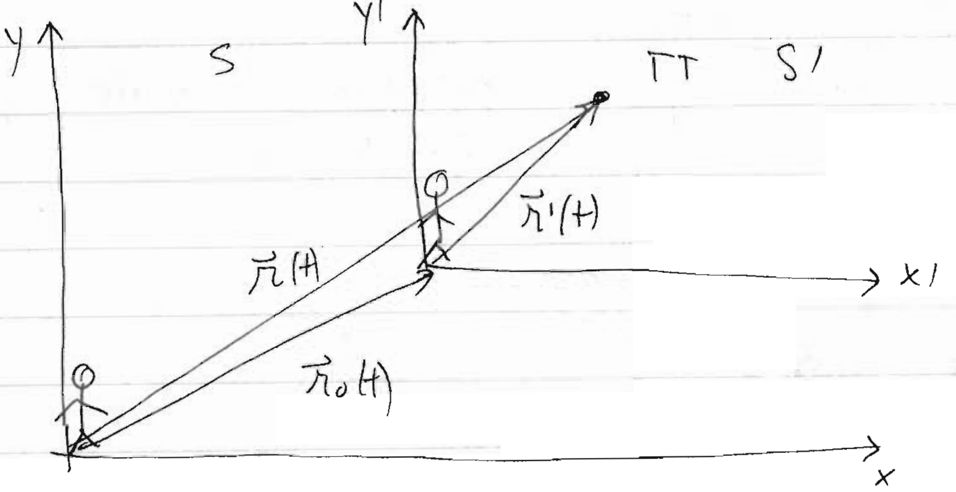
$\odot$ vektor, ki gleda ven iz zvezka

$\otimes$ vektor, ki gleda v zvezek.

Pokus: Lissajousove krivulje. Primerjava kroženja in nihanja.

1.1.5. Relativno gibanje

Opis gibanja TT v dveh različnih opazovalnih (koordinatnih) sistemih S in S':



$\vec r(t)$ ... krajevni vektor TT, izmerjen v sistem $S = (x, y)$

$\vec r'(t)$ ... krajevni vektor TT, izmerjen v sistem $S' = (x', y')$

$\vec r_0$ ... vektor, ki povezuje koord. izhodišči obeh sistemov.

Predpostavimo: i) sistema se med seboj gibljeta translatorno (brez rotacij)

ii) hitrost enega sistema glede na drugi je konstantna (ni pospeška)

Takšni sistemi so nepospešeni ≡ inercialni.

Za te sisteme veljajo preprosti zakoni transformacije hitrosti in pospeškov. V obeh sistemih je čas enak in enako hitro teče, $t' = t$

odvajam po času t

$$\vec r(t) = \vec r_0(t) + \vec r'(t)$$

$$\frac{d\vec r}{dt} = \frac{d\vec r_0}{dt} + \frac{d\vec r'}{dt} \rightarrow \boxed{\vec v_s(t) = \vec v_0 + \vec v_s'}$$

Hitrosti se enostavno vektorsko seštevajo.
$\vec{v}_s$ … hitrost telesa v sistemu S
$\vec{v}_{s'}$ … hitrost telesa v sistemu S'
$\vec{v}_0$ … hitrost koordinatnega sistema S' v sistemu S.

$$\boxed{\vec{v}_s = \vec{v}_0 + \vec{v}_{s'}}$$

Galilejeva transformacija!
$\vec{v}_0$ = konstantna

Če odvajam po času dobim

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}_{s'}}{dt} = 0 + \frac{d\vec{v}_{s'}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a}_s = \vec{a}_{s'}}$$

pospeška telesa sta v obeh sistemih enaka!! To je bistvo inercialnih (nepospešenih) sistemov.

Zgornji izraz ne velja, če je sistem pospešen. Naprimer v avtobusu, ki zavira, na nas deluje dodatni pospešek, ki izvira iz pospešenosti avtobusa. Pri kroženju deluje centrifugalna sila. To so sistemske sile, ki izvirajo iz neinercialnosti sistema. Ali pa dvigalo, ki pospešuje → čutimo dodaten pospešek, čeprav ne vidimo, da dvigalo pospešuje.
Galilejeve transformacije veljajo če je

$|\vec{v}_s|, |\vec{v}_0| < c_0$ c_0 … hitrost svetlobe v vakuumu.

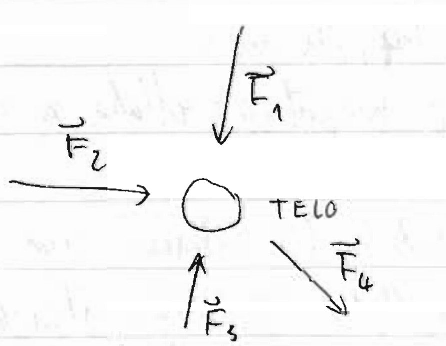
Pri hitrostih $|\vec{v}| \approx c_0$ veljajo t.im. Lorentzove transformacije in relativnostna teorija.
Trditev: hitrost svetlobe c_0 je v vseh gibajočih sistemih enaka.

1.2. Sile in Newtonovi zakoni

1.2.1. Pojem sile med dvemi telesi, Newtonovi zakoni:

Isaac Newton: 1642-1727

Angleški matematik in fizik, ki je postavil temelje "klasične" mehanike, ki opisuje gibanje makroskopskih teles pri nizkih hitrostih. V delu Principia Mathematica, izdanem v letu 1686 je zapisal zakone gibanja in gravitacijski zakon. Isac Newton je uvedel pojem sile, s katerim je označil vpliv okolice na dano telo. Pojem sile je pomembna abstrakcija, saj dopustimo, da eno telo deluje na drugo na razdaljo (Action at a distance). ~~Newton je zapisal~~



$\vec{F}_i$ ... zunanje sile, ki delujejo na dano telo

Newton je zapisal tri zakone, ki predstavljajo temelj klasične mehanike:

1. Newtonov zakon: telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje nobena sila ali če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič.

Primer: voziček na zračni progi. Ali je v naravi teles, da pri gibanju izgubljajo hitrost? S premislekom pridemo do sklepa, da bi telo na idealni podlagi vztrajalo v gibanju.

2. Newtonov zakon: pospešek telesa $\vec{a}$ je sorazmeren z zunanjo silo $\vec{F}$ in ima njeno smer. Pospešek telesa je obratno-sorazmeren z maso telesa m.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad , \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ rezultanta vseh zunanjih sil.

$\vec{a}$ .... pospešek telesa $[m s^{-2}]$

$\vec{F}$ .... zunanja sila $[N] = [kg\, m s^{-2}]$ Newton.

m .... $[kg]$

m.... masa telesa. Je merilo za to, kako se telo odziva na zunanjo silo F. Če je masa velika, je pospešek telesa ustrezno majhen.

Osnovne enote v mehaniki so kg, m in s.

Enota za meter: dolžina, ki jo prepotuje svetloba v vakuum v času 1/2.99.7.92.458 s

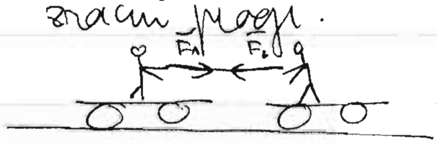
Enota za čas: sevalni prehodi v Cs atomu. Ena sekunda je čas, potreben za 9.192.631.770 nihajev EM polja pri prehodu v cezijevem atomu.

Enota za kg: Masa atoma ^{12}C je 12 atomskih masnih enot $m_0 = 1.660540 \cdot 10^{-27}$ kg.

Avogadrovo število: $N_A = 6.0224 \cdot 10^{23}$ število atomov/molekul v enem molu. 1 mol katerega koli elementa vsebuje toliko delcev, kot 12 gramov ^{12}C.

3. Newtonov zakon: če deluje prvo telo na drugo s silo $\vec{F}$, potem deluje drugo telo na prvo z nasprotno enako silo $-\vec{F}$.

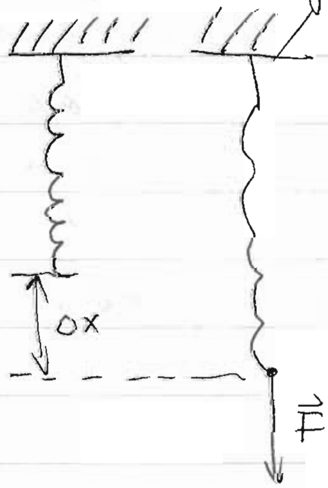
Primer: 2 moža na vozičkih, dva vozička na zračni progi.



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

1.2.2. Meritev sil, sila trenja, lepenja, sila teže

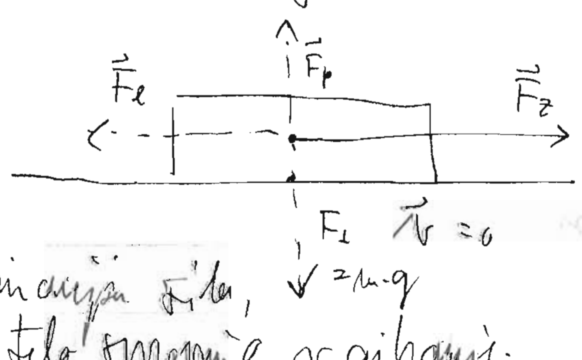
Sile merimo z vzmetmi, ki sestavljajo vzmetno tehtnico. Raztezek vzmeti je sorazmeren z zunanjo silo



$\vec{F} = k \cdot \Delta x$ k ... koeficient vzmeti [N/m]
Δx ... raztezek vzmeti.

S tankimi vzmetmi lahko merimo zelo majhne sile, do 10^{-12} N.

Sila lepenja:

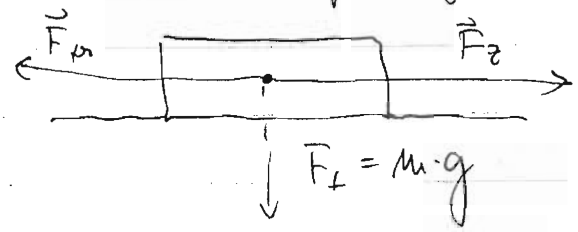


Sila lepenja je največja sila, ki je potrebna, da telo spravimo v gibanje. $F_l = k_l \cdot F_\perp$

$F_\perp$ ... sila pravokotna na podlago.

les-les: $k_l = 0.4$
led-led: $k_l = 0.1$
guma-beton (suho) $k_l = 1.0$
guma-beton (mokro) $k_l = 0.7$

Sila trenja: to je sila, ki je potrebna, da vzdržujemo konstantno hitrost gibanja telesa po vodoravni podlagi.

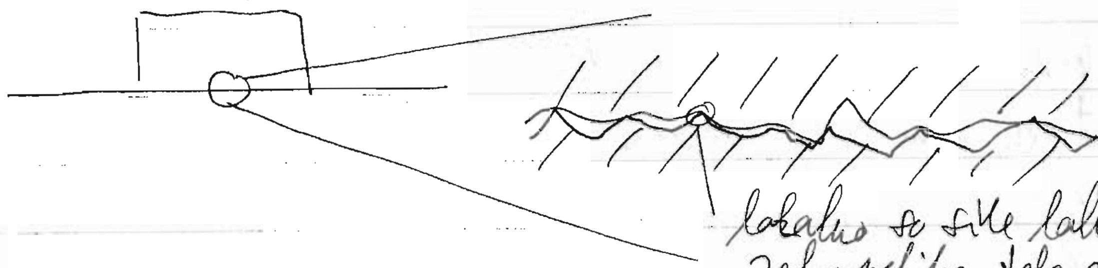


led-led: $k_{tr} = 0.02$

kovina-kovina: $k_{tr} = 0.1 - 0.2$
(brez mazanja)

$F_{tr} = k_{tr} \cdot m \cdot g$

koeficient trenja je odvisen od podlage. Trenje nastopa zaradi površinskih nepravilnosti na stičnih ploskvah teles:



lokalno so sile lahko zelo velike, tela se "tesno" spojijo zaradi medatomskih sil.

Če je površina zelo gladka, lahko pridemo do primera, da je sila trenja zelo velika: steklo-steklo.

Sila teže: nastane zaradi gravitacijskega privlaka Zemlje in kaže proti njenem središču. Na nadmorski višini 0 je težnostni (gravitac.) pospešek enak $9{,}8\, m/s^2$, nekaj manjši je na ekvatorju, največji na polih.

$F_g = m \cdot g$, smer proti središču Zemlje.

V naravi poznamo 4 osnovne sile:

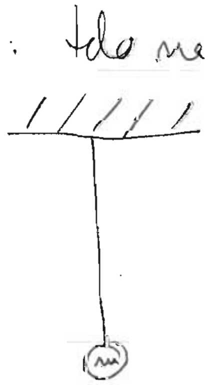
- gravitacijska sila med dvema masama. jakost 10^{-38}
- elektromagnetna sila med [illegible] naelektrenimi delci jakost 10^{-2}
- močna (jedrska) sila zadržuje protone in nevtrone v atomskem jedru. Zadržuje kvarke v barionih. jakost 1 | Podobno EM: atom → Van der Waals | močna sila: kvarki → jedro
- šibka sila je odgovorna za radioaktivni razpad osnovnih delcev (jedro) ($n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$) β^--razpad jakost 10^{-7}
  ($p \to n + e^+ + \nu_e$) β^+-razpad

Daleč najbolj pomembna je elektromagnetna sila. Je odgovorna za vezavo elektronov in jedra v atome, za sile med atomi in molekulami. Praktično vse sile v našem svetu se dajo pojasniti z elektromagnetno silo.

1.2.3. Uporaba Newtonovih zakonov v statiki in dinamiki.

a) statika. Telesa mirujejo ali se gibljejo premo enak. če je $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$. To je vektorska enačba in pomeni $\sum_{i=1}^{N} F_{ix} = 0$, $\sum_{i=1}^{N} F_{iy} = 0$, $\sum_{i=1}^{N} F_{iz} = 0$

Primer 1: telo na vrvici, miruje



i) telo z maso m miruje:

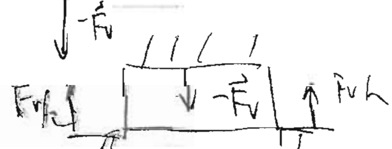
$\vec{F}_v + \vec{F}_g = 0$

$F_v - m \cdot g = 0$

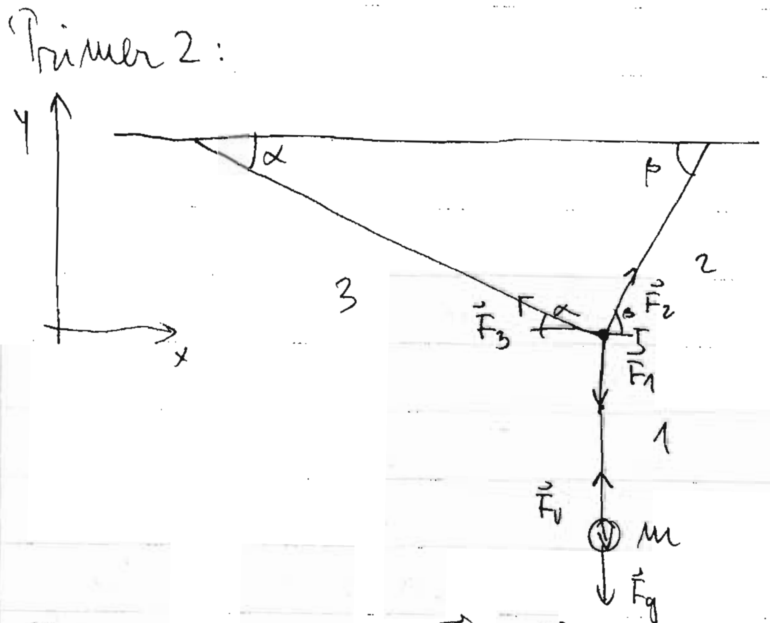
$F_v = m \cdot g$

ii) vrvica je napeta s silo F_v

iii) strop



Primer 2:



Kolikšne so sile v vrvicah, če poznan α in β

i) Masa m miruje: $\vec F_g + \vec F_v = 0$ $\quad -m\cdot g + F_v = 0$

$F_v = m\cdot g$

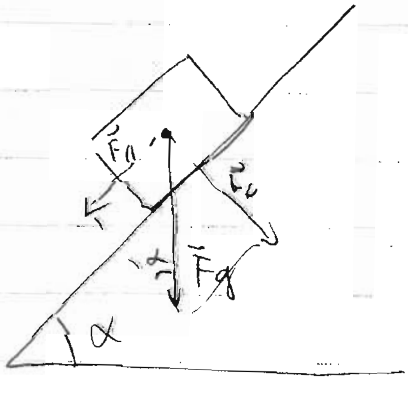
ii) $|\vec F_1| = |\vec F_v|$ vrvica 1 miruje

iii) Točka T miruje: $\vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{ll} x\text{-smer:} & 0 + F_2\cdot\cos\beta - F_3\cos\alpha = 0 \\ y\text{-smer:} & -m\cdot g + F_2\cdot\sin\beta + F_3\cdot\sin\alpha = 0 \end{array}\right\}$$

dve enačbi z dvema neznankama, F_2 in F_3.

Primer 3: ravnovesje na klancu:



Kdaj klada zdrsne, če je koeficient lepenja le znan.

Pri obravnavi teles na klancu vedno sile razdelimo na komp. vzdolž klanca in pravokotno nanj.

Sile vzdolž klanca povzročajo gibanje, sile pravokotno na klanec pa povzročajo trenje.

$F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$F_{\perp} = m \cdot g \cdot \cos\alpha \Rightarrow F_t = k_t \cdot F_{\perp} = k_t \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$

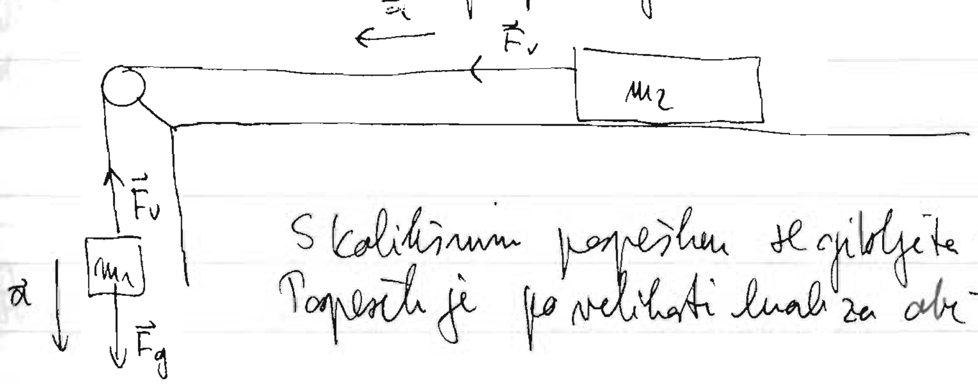
Pogoj za ravnovesje $\quad F_{\parallel} \leq F_t$

$$m \cdot g \sin\alpha \leq k_t \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \leq k_t}$$

Če α preseže določeno vrednost, zgornja enačba ni več izpolnjena in telo se začne gibati, zdrsne.

b) dinamika: Primer: pospeševanje vozička na zračni progi



S kolikšnim pospeškom se gibljeta telesi?
Pospešek je po velikosti enak za obe telesi.

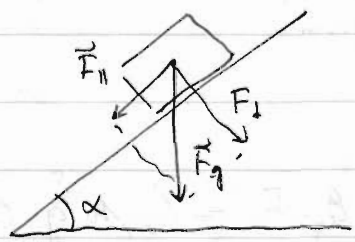
masa m_1: $\quad F_g - F_v = m_1 \cdot a \quad$ + štejemo v smeri pospeška

masa m_2: $\quad F_v = m_2 \cdot a$

$$F_g = m_1 \cdot g = (m_1 + m_2)\, a$$

$$\boxed{a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g}$$

Primer: pospeševanje na klancu, brez trenja



$$F_\parallel = m\cdot g\cdot \sin\alpha = m\cdot a \Rightarrow a = g\cdot \sin\alpha$$

1.2.4. Newtonovi zakoni in gibalna količina TT

Zapišimo 2. Newtonov zakon za točkasto telo:

$$\vec F = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i = m\cdot \vec a$$

$$\vec F = m\cdot \frac{d\vec v}{dt} \qquad /\cdot dt$$

$$m\cdot d\vec v = \vec F\cdot dt$$

$$d(m\cdot \vec v) = \vec F\cdot dt$$

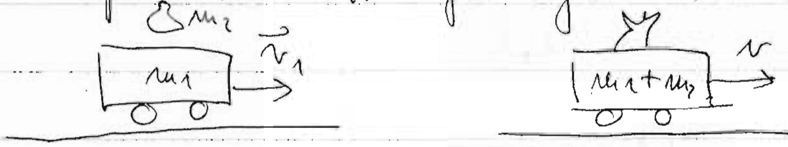
Uvedemo: $m\cdot \vec v = \vec G$ .... gibalna količina točkastega telesa

$$d\vec G = \vec F\, dt$$

$$\int_{\vec G'}^{\vec G(t)} d\vec G = \int_0^t \vec F(t)\, dt \Rightarrow \boxed{\vec G(t) - \vec G(0) = \int_0^t \vec F(t)\, dt}$$

Zakon o ohranitvi gibalne količine TT: sprememba gibalne količine točkastega telesa je enaka sumi zunanjih sil.

Primer 1: Na vozičku, ki se z enakomerno hitrostjo giblje po vodoravnem tiru, spustimo vrečo s peskom v smeri navpično navzdol. Kaj se zgodi s hitrostjo vozička?



ali je $\vec{v} = \vec{v}\,'$?

Poglejmo kam deluje sila, s katero m_2 pritisne na voziček? Zunanje sile delujejo navpično, torej ne more vplivati na gibanje v vodoravni smeri:

$$\int F_z(t)\,dt = 0 \Rightarrow \vec{G} - \vec{G}\,' = 0$$

$$m_1 \cdot v_1 - (m_1+m_2)\, v = 0$$

$$\boxed{v = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot v_1}$$

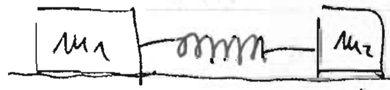
Bolj podrobno:
a) navpična smer: dve telesi + podlaga. Najprej trk vreče z vozičkom, nato se dotika s podlago
b) vodoravna smer: trk vozička v mirujočo vrečo

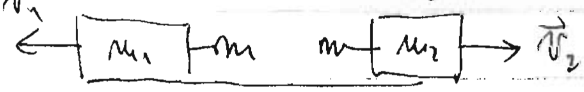
$$(m_1+m_2)\cdot v - (m_1 \cdot v_{1x} + m_2 \cdot v_{2x}) = 0$$

Hitrost vozička se zmanjša.

takoj ko obravnavamo dve telesi ni shranjena gibalna količina. Ali je to formalno v redu? Poglejmo na pobočni; delji

Primer 2: Dva vozička na zračni progi sta med seboj povezana z vzmetjo, ki je stisnjena. Vozička spustimo. S kakšnima hitrostma se oddaljujeta?





Poglejmo gibanje mase m_1. Na njo deluje sila nemoti, od druge mase:

m_1: $\boxed{m_1} \xleftarrow{\vec{F}_{21}(t)}$

Velja zakon o ohranitvi gib. količine

$$m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{v}_1' = \int F_{21}(t)\,dt$$

Poglejmo maso m_2: na njo deluje obratna sila

m_2: $\xrightarrow{-\vec{F}_{21}(t)} \boxed{m_2}$

$$m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_2' = -\int F_{21}(t)\,dt$$

$$m_2 \vec{v}_2 - m_2 \vec{v}_2' = -m_1 \vec{v}_1 + m_1 \vec{v}_1'$$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \underbrace{m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'}$$

začetna gib. količina obeh je 0

$$\boxed{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0}$$

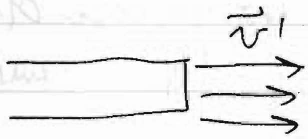
s tem je podano razmerje hitrosti

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$ upoštevam predznak

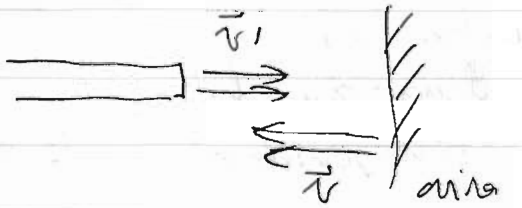
$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$ obe gibalni količini ~~sta enak~~ sta enaki (nasprotno enaki).

Povzetek: sistem teles, gibalna količina je vekt. vsota posameznih $\vec{G}_i$. Notranje sile med telesi ne morejo spremeniti celotne gibalne količine.

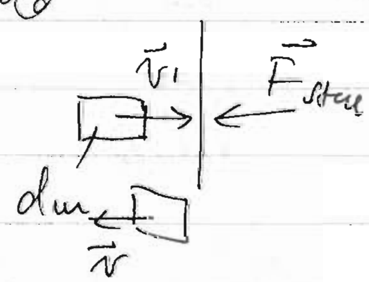
Primer 3: sila curka in obratna sila curka.



iz šobe izteka voda s hitrostjo $\vec v'$. Vodni curek se od ovire odbije, tako da je končna hitrost $\vec v$:



Poglejmo, kaj se zgodi v kratkem času dt. V tem času se masa dm odbije od ovire. Torej ovira deluje s silo $\vec F_{stene}$ na vodo



Gibalna količina mase dm se v času dt spremeni za

$$dm \cdot \vec v - dm \cdot \vec v' = \vec F_{st.} \cdot dt \qquad /:dt$$

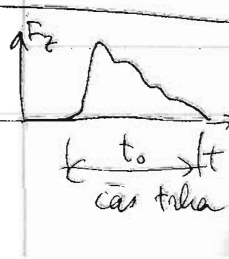
$$\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\phi_m} (\vec v - \vec v') = \vec F_{stene}$$

$$\phi_m (\vec v - \vec v') = \vec F_{stene} \qquad \vec F_{vod.\,curka} = -\vec F_{stene}$$

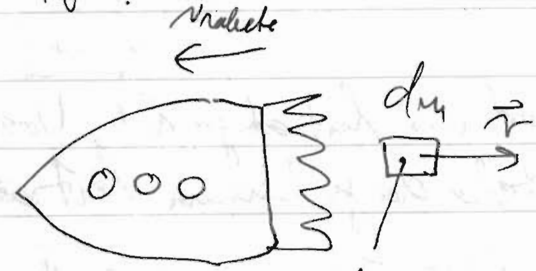
$$\boxed{\vec F_c = \phi_m (\vec v' - \vec v)}$$

Primer 4: air bag

$$\vec G - \vec G' = \int \vec F_z(t)\, dt$$



Kaj pa razumemo pod potisna sila curka? Poglejmo raketo, ki vsak trenutek dt odvrže maso plina dm s hitrostjo $\vec v$:



majhna masa plina dm, ki jo izvrže raketa v času dt s hitrostjo $\vec v_{pl}$

Plin ima hitrost $\vec v$ in ima gibalno količino

$$dm(\vec v_{pl} - \vec v_{rakete}) = \underbrace{\vec F_{rakete}}_{\text{sunek sile rakete}} dt = -\underbrace{\vec F_{plin}}_{\text{sila plina je nasprotno enaka odvodu}} dt$$

$$\cancel{\vec F_{plina} = -\vec v_{pl.} \frac{dm}{dt} = -\vec v_{pl} \phi_m}$$

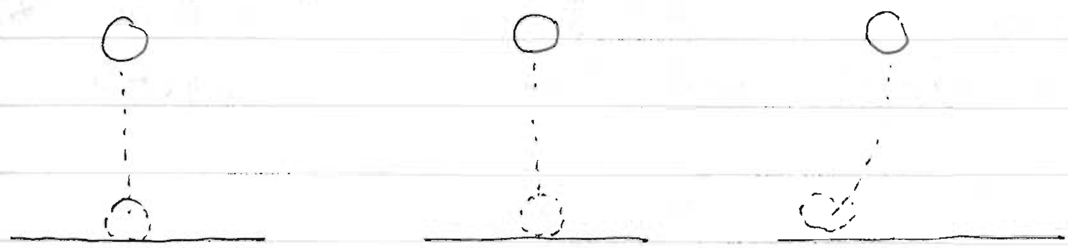
~~Potisna sila plina:~~ $\boxed{\cancel{\vec F_{pl} = -\vec v_{pl} \cdot \phi_m}}$

$$\vec F_{pl} = \frac{dm}{dt}(\vec v_{rak} - \vec v_{pl}) = \phi_m (\vec v_{rak} - \vec v_{pl}) =$$

$\boxed{\hat F_{pl} = \phi_m \cdot v_0}$ $\quad v_0$ = relativna hitrost plina glede na raketo

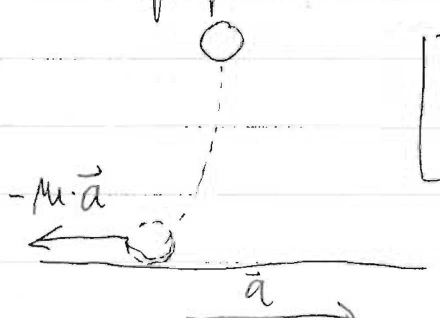
1.2.5. Sile v neinercialnih sistemih

Primer: prosti pad v mirujočem in pospešenem sistemu.



(a) mirujoči sistem — (b) enakomerno gibajoči se sistem — (c) enakomerno pospešeni sistem

V pospešenem (neinercialnem) sistemu očitno ne velja Newtonov zakon $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, pri čemer je $\vec{F}$ zunanja sila na telo. Vemo, da je v primeru (c) prisotna samo gravitacijska sila kot "prava" sila, ni pa nobene zunanje "prave" sile v smeri vodoravno. Če hočemo, da velja Newtonov zakon, moramo uvesti t.im. "navidezno" ali "psevdo-silo" ali "sistemsko silo", ki nastopi zaradi pospešenosti sistema. Smer te sile pri translacijskem, pospešenem sistemu je obratna smeri pospeška sistema:



$$\boxed{\vec{F}_{psevdo} = -m \cdot \vec{a}}$$

$\vec{a}$ .... pospešek sistema

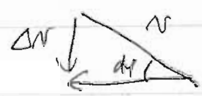
Na padajoče telo v pospešenem sistemu torej deluje navidezna sila v obratni smeri pospeška sistema.

Poseben primer neinercialnega sistema (pospešenega) je opazovalni sistem S', ki se vrti s kotno hitrostjo ω glede na mirujoči sistem S. Vemo, da je tak sistem pospešen, saj mora na mirujoče telo v takem sistemu delovati centripetalna sila in pospešek

$$F_{centripet} = m \cdot a_{centrip} = m \cdot \omega^2 r$$

Zaradi tega pospeška v vrtečem sistemu deluje navidezna sila ≡ centrifugalna sila, ki je obratno usmerjena kot radialni pospešek:

$$\boxed{\vec{F}_{centrifug} = -m\omega^2 r}$$

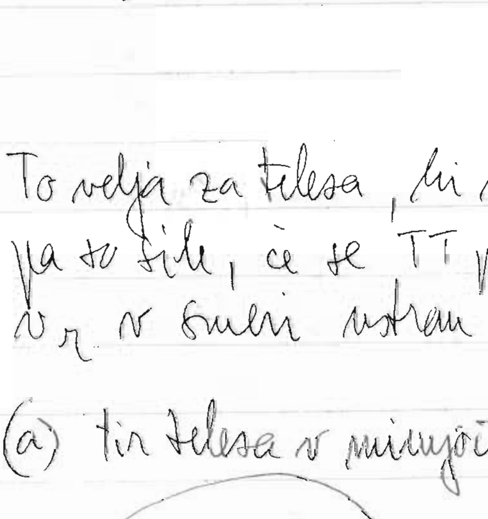


$$\Delta v = v\, d\varphi = \omega \cdot r \cdot d\varphi$$

$$\frac{dv}{dt} = \omega \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega^2 \cdot r$$

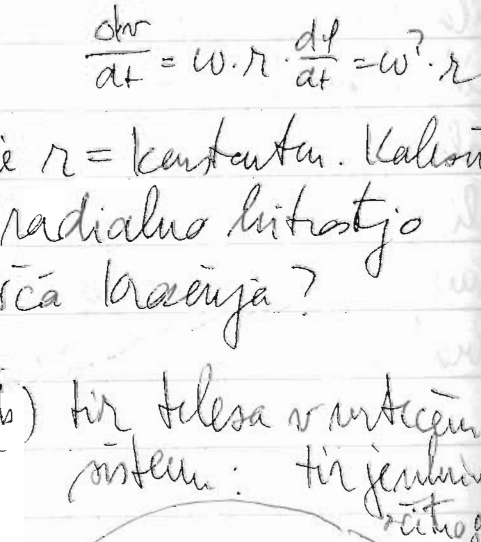
To velja za telesa, ki krožijo in je r = konstanten. Kakšne pa so sile, če se TT premika z radialno hitrostjo v_r v smeri ven od središča kroženja?

(a) tir telesa v mirujočem sist.

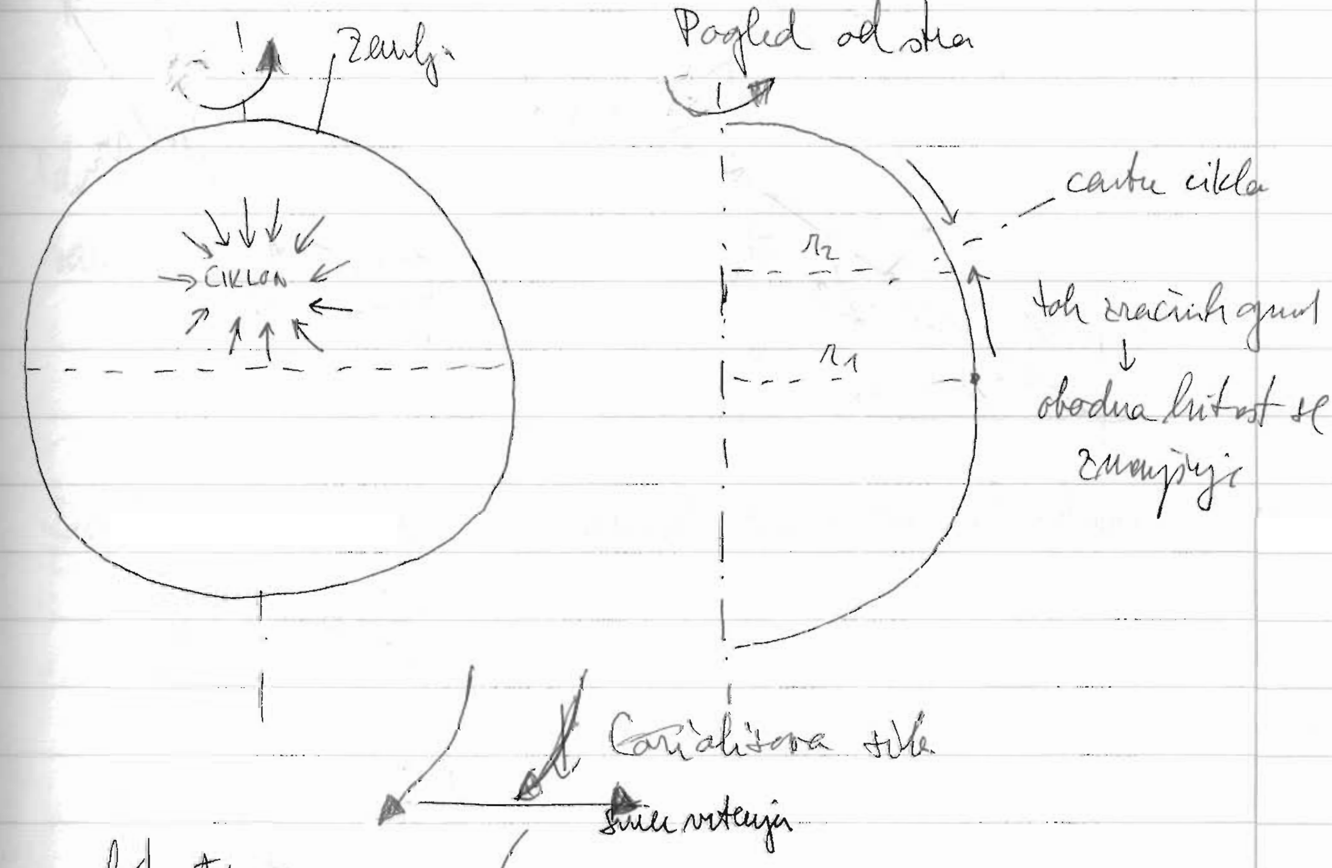


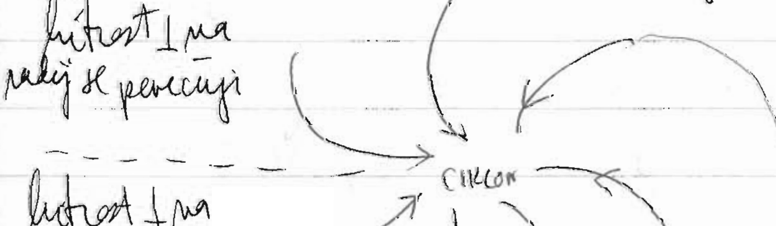
tir je daljica

(b) tir telesa v vrtečem sistemu: tir je ukrivljen – očitno deluje neka sistemska sila.



V vrtečem sistemu deluje na telo, ki se premika z enakomerno hitrostjo navzven (kvečjemu radiju, ali obratno) t.im. Coriolisova sila. Ta sila je najmanj odgovorna za to, da se zračne gmote ciklona vrtinčijo.

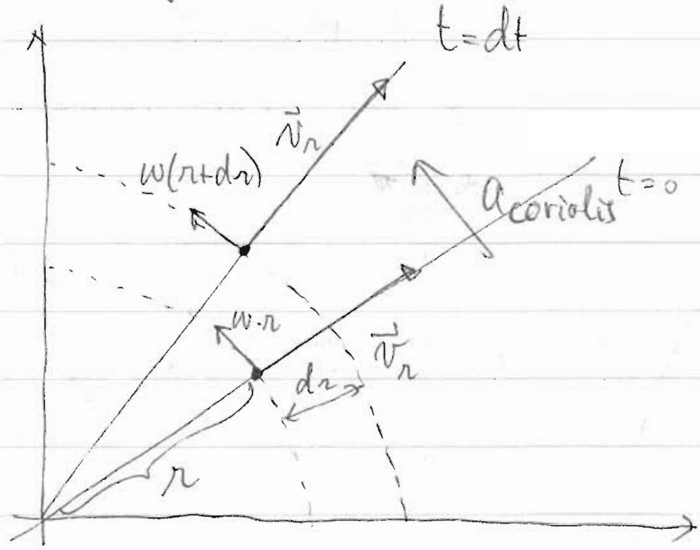


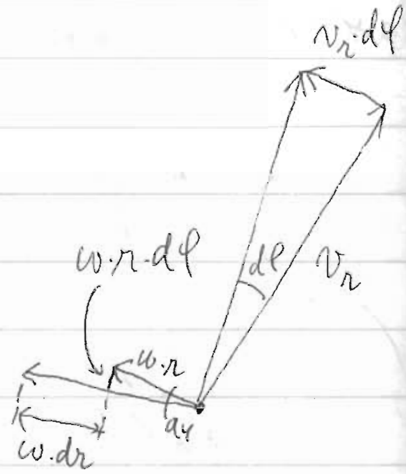


Na severni polobli se zračne gmote v ciklonu vrtijo v obratni smeri urinega kazalca.
Na južni polobli je obratno.

Coriolisova sila: izpeljava na vajah.
Topništvo: pri dosegu topov 10 km je popravek reda 20 m.

Opazujemo gibanje telesa, ki se v vrtečem sistemu giblje z enakomerno hitrostjo navzven.
Kratka izpeljava Coriolisove sile: Pogledamo vektor hitrosti telesa ob dveh različnih časih, ki se razlikujeta za dt, sistem pa se je zavrtel za $d\varphi$.





i) Sprememba hitrosti v radialni smeri: $dv_r = \omega \cdot r \cdot d\varphi$

$$\frac{dv_r}{dt} = \omega \cdot r \cdot \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega} =$$

$$a_r = \omega^2 \cdot r$$

To je torej radialni pospešek

ii) Sprememba hitrosti v smeri $\perp$ na radij

$$dv = v_r \cdot d\varphi + \omega \cdot dr \qquad / : dt$$

$$\frac{dv}{dt} = v_r \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \omega \cdot \frac{dr}{dt} = v_r \cdot \omega + \omega \cdot v_r = 2\omega v_r$$

To je Coriolisov pospešek, ki deluje v smeri $\perp$ na radij:

$$\boxed{a_{coriolis} = 2\omega \cdot v_r} \qquad F_{coriol} = 2m\omega \cdot v_r$$

1.3. Delo in energija

1.31. Kinetična energija in delo zunanjih sil

Poglejmo, kaj se dogaja s TT, na katerega deluje zunanja sila $\vec{F}$. Vemo, da velja 2. Newtonov zakon

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Telo se giblje v določeni smeri, zato označimo premik telesa z vektorjem $d\vec{s}$

Če bo sila na sama, potem bo $d\vec{s}$ imel smer $\vec{F}$

Definiramo delo zunanje sile

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m \cdot d\vec{v} \cdot \overbrace{\frac{d\vec{s}}{dt}}^{\vec{v}} =$$

$$= m \cdot \vec{v} \cdot d\vec{v} = m \tfrac{1}{2} d(\vec{v}^2) \rightarrow \text{diferencial od } \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Preverimo: $\vec{v}\, d\vec{v} = v_x\, dv_x + v_y\, dv_y + v_z \cdot dv_z$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \text{in} \quad d\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$$

$$\vec{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad ; \quad \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt}$$

$$\text{ali} \quad d(\vec{v}^2) = 2 \cdot \vec{v}\, d\vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(\vec{v}^2)$$

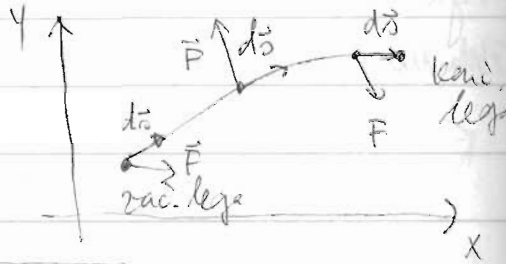
Dobilimo $\quad dA = \frac{m}{2} \cdot d\vec{v}^2 = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$

$\vec{G} = m\vec{v}$ ... gib. količina

Sedaj pa ~~integriramo~~ definiramo: $W_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\vec{G}^2}{2m}$

Kinetična energija točkastega telesa

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = dW_k$$



Sedaj pa integriram po krivulji

$$\boxed{A = \int_{\text{začetna lega}}^{\text{končna lega}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{W_k'}^{W_k} dW_k = W_k - W_k'}$$

Izrek o kinetični energiji

A ..... delo zunanjih sil, ko se telo premika iz začetne v končno lego

W_k, W_k' ... končna in začetna kinetična energija

Poseben primer, če je $\vec{F}$ = konst, $d\vec{s}$

$$dA = F\cdot ds\cdot\cos\phi$$

Moč sile: $\vec{F}\,d\vec{s} = dW_k = dA$

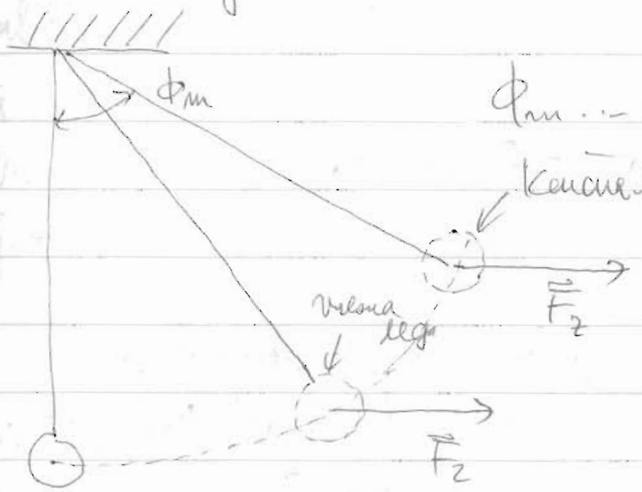
$$\boxed{P = \frac{dA}{dt}}$$

Enote: delo, A .... [N·m] = [J] Joule

kinetična en. W_k $\left[\frac{mv^2}{2}\right]$ $[kg\cdot m^2 s^{-2}] = [N\cdot m] = [J]$

moč $P = \frac{dA}{dt}$, $\frac{A}{t}$ $[J s^{-1}] = [W]$

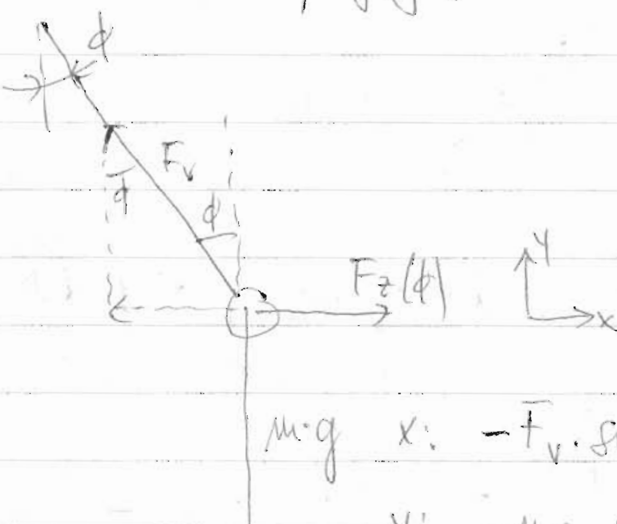
Primer dela zunanje sile: Telo z maso m je obešeno na vrvici dolžine l. Z zunanjo silo F v vodoravni smeri telo premikamo zelo počasi, tako da se odkloni. Izračunaj delo zunanje sile:



ϕ_m ... največji kot, za katerega je telo odklonjeno

$\vec{F}_z$ ... zunanja sila (je največja, ko je telo odklonjeno za ϕ_m)

Očitno se sila F_z po velikosti spreminja, od zelo majhne na začetku, do velike na koncu. V vsakem trenutku pa velja za to silo ravnovesni pogoj:



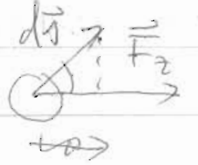
$$\left.\begin{aligned} x:&\quad -F_v \cdot \sin\phi + F_z(\phi) = 0 \\ y:&\quad -mg + F_v \cdot \cos\phi = 0 \end{aligned}\right\} \text{Ravnovesje sil}$$

$$F_v = \frac{m \cdot g}{\cos\phi} \Rightarrow$$

$$-\frac{m \cdot g \cdot \sin\phi}{\cos\phi} + F_z(\phi) = 0 \Rightarrow F_z(\phi) = m \cdot g \cdot \mathrm{tg}\,\phi$$

Ustavil si se tukaj. Tako nadaljuj:

sedaj pa izračunam delo sile $F_{zu}(\phi)$:

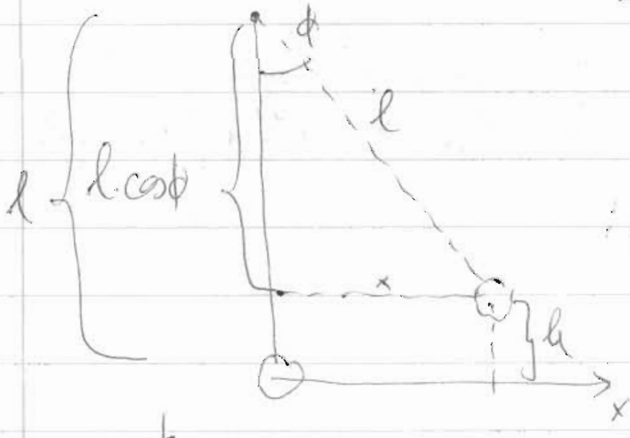


$$d\vec{s} = (dx, dy)$$
$$\vec{F}_z = (F_z, 0)$$

$$dA = \vec{F}_z \cdot d\vec{s} = F_z \cdot dx = F_z(\phi)\cdot dx$$

$$A = \int_0^{\phi_m} F_z(\phi)\cdot dx$$

imam dve spremenljivki, ki sta odvisni: ϕ ali x. Izberem si eno. Kakšna je zveza?



$$x = l\cdot\sin\phi$$
$$dx = l\cdot\cos\phi\, d\phi$$

$$A = \int_0^{\phi_m} m\cdot g\cdot \mathrm{tg}\,\phi \cdot l\cdot\cos\phi\, d\phi = m\cdot g\cdot l\int_0^{\phi_m}\sin\phi\, d\phi =$$

$$= m\cdot g\cdot l\,(-\cos\phi)\Big|_0^{\phi_m} = -m\cdot g\, l\,(\cos\phi_m - 1) =$$

$$= m\cdot g\cdot \underbrace{l\,(1-\cos\phi)} = m\cdot g\,(l - l\cdot\cos\phi) = m\cdot g\cdot h$$

$A = m\cdot g\cdot h$ delo je enako spremembi potencialne energije telesa.

1.3.2. Potencialna energija točkastega telesa in gravitacijski zakon

Sila teže ima posebno vlogo pri gibanju točkastih in ostalih teles, ker jo velikokrat upoštevamo. Zato delo sile teže posebej obravnavamo in uvedemo potencialno energijo, ki opisuje delo, ki ga opravi sila teže. Zapišemo vse zunanje sile, ki delujejo na telo v obliki:

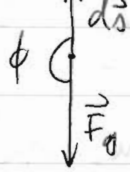
$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ostale}$$

Dršimo sedaj delo teh sil:

$$A = \int_{\text{zač. lega}}^{\text{konč. lega}} \vec{F}\, d\vec{s} = \int_{\text{zač. lega}}^{\text{konč. lega}} \vec{F}_g\, d\vec{s} + \int_{\text{zač. lega}}^{\text{konč. lega}} \vec{F}_{ostale}\, d\vec{s} = A_{teže} + A_{ostale}$$

Izračunajmo, kolikšno je delo sile teže:

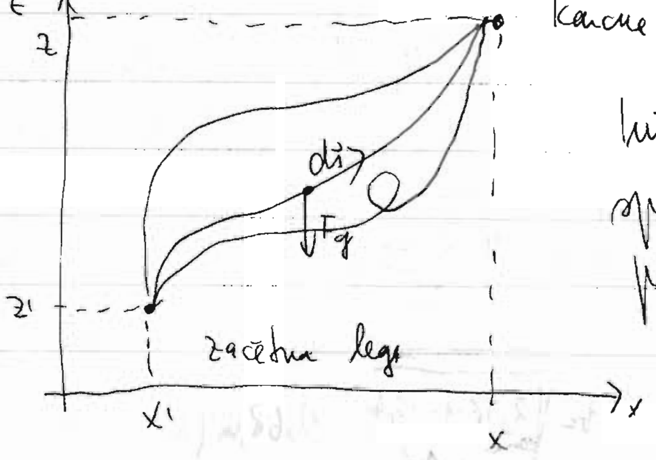
$$A_{teže} = \int_{\text{zač. lega}}^{\text{konč. lega}} \vec{F}_g\, d\vec{s} = -m \cdot \int_{\text{zač. lega, višina}}^{\text{konč. višina}} g(z)\, dz$$



$$\vec{F}_g\, d\vec{s} = (0,0,-F_g)(dx,dy,dz)$$
$$= m \cdot g(z) \cdot dz \cdot \cos\phi$$
$$= -m \cdot g(z) \cdot dz$$

dz je predznačena količina

Od česa je odvisen ta integral?



Integral je odvisen samo od spodnje in zgornje meje, ni pa odvisen od poti, kako pridemo od začetne lege do končne lege.

Energijski zakon zapišemo:

$$A = A_{teže} + A_{ostale} = W_k - W_k' = \underbrace{- m\int_{z'}^{z} g(z)\,dz + A_{ostale}}$$

Sedaj pa uporabimo zadnjo enačbo in napišemo delo ostalih sil

$$A_{ostale} = W_k - W_k' + \underbrace{m\int_{z'}^{z} g(z)\,dz}_{\text{to definiramo kot razliko potencialnih energij telesa na koncu in začetku}}$$

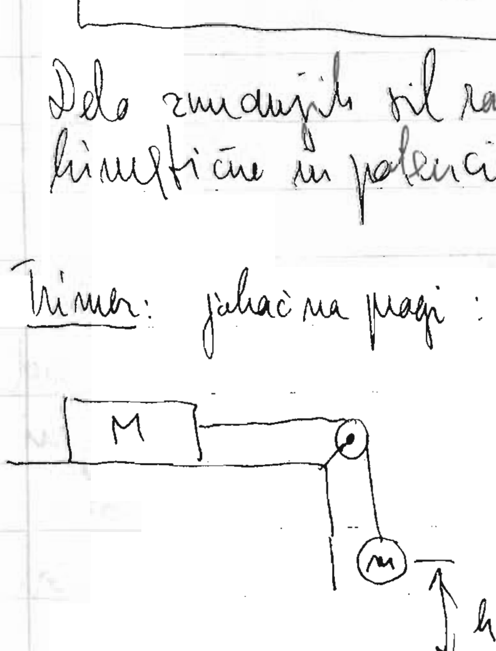
$$\boxed{W_p(z) - W_p'(z') = m \cdot \int_{z'}^{z} g(z)\,dz}$$

Energijski zakon potem zapišemo kot:

$$\boxed{A_{ostale} = W_k - W_k' + W_p - W_p'}$$

Delo zunanjih sil razen sile teže je enako vsoti sprememb kinetične in potencialne energije telesa.

Primer: jahač na vagi:



$$W_k - W_k' + W_p - W_p' = 0$$

$$(M+m)\frac{v^2}{2} + 0 - m \cdot g \cdot h = 0$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+M}}}$$

Izmerim:

$v = 0{,}66\ m/s$

$m = 10{,}4g$

$M = 430{,}7g$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1 \cdot 10{,}4}{441{,}1}} = 0{,}68\ m/s$$

Keppler: za razmerje med kubom radija kroženja in kvadratom obh. časa t_0 je konstanta:

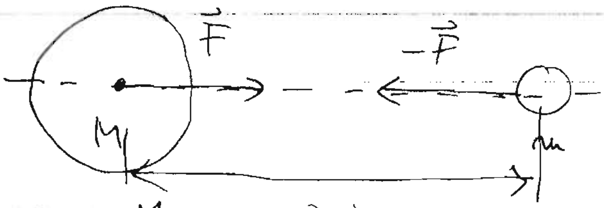
$$\boxed{\frac{r^3}{t_0^2} = \text{konst}}$$

Newton: $F_g = m \cdot a_r = m \cdot g = m \cdot \omega^2 r = m \cdot r \cdot \frac{\text{konst.} 4\pi^2}{r^3} = \frac{\text{konst.} 4\pi^2}{r^2} \cdot m$

$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{t_0^2} = \frac{\text{konst.} 4\pi^2}{r^3}$

Gravitacijski pospešek se z oddaljenostjo od Zemlje manjša, ker gravitacijska sila pada z oddaljenostjo med telesi. $g(r) = \frac{\text{konst.} 4\pi^2}{r^2}$

Za gravitacijsko silo med dvema masama M in m velja Keplerjev gravitacijski zakon: (prvi ga je v tej obliki zapisal I. Newton v Principia Mathematica)



$$F = \frac{\kappa \cdot m \cdot M}{r^2} = \frac{\kappa \cdot M}{r^2}\, m = F_g \qquad \kappa = 6.67 \cdot 10^{-11}\, Nm^2 kg^{-2}$$

gravitacijska konstanta.

V zgornji enačbi je gravitacijski pospešek med dvema telesi

$$\boxed{g(r) = \frac{\kappa \cdot M}{r^2}}$$

To je gravitacijski pospešek, ki ga povzroča masa M na razdalji r. Pospešek pada s kvadratom naraščajoče razdalje!

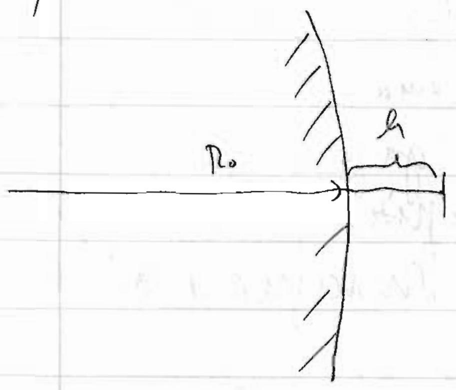
Odvisnost pospeška od razdalje od Zemlje zapišemo tudi kot

$$g(R_0) = \frac{\kappa \cdot M}{R_0^2} \qquad R_0 = 6.4 \cdot 10^6\, m \text{ polmer Zemlje}$$

Gravitacijsko konstanto κ in maso Zemlje M torej izrazimo z pospeškom na površini Zemlje, $r = R_0$:

$$\boxed{g(r) = g(R_0) \cdot \frac{R_0^2}{r^2}} \qquad \boxed{M_z = 6 \cdot 10^{24}\, kg}$$

a) Približek za majhne višine: $g(r) = g(R_0)\cdot\frac{R_0^2}{(R_0+h)^2} \approx$



$$\approx g(R_0)\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_0}\right)^2} \approx g(R_0)\left(1-2\frac{h}{R_0}\right)$$

U prvem približku je $g(R_0) = g(r)$, neodvisno od h-ja

$$W_p(z) - W_p'(z') = m\cdot\int_{z'}^{z} g(R_0)\cdot dz = m\cdot g(R_0)(z-z')$$

$$\boxed{W_p = m\cdot g\cdot z}$$ Ničla je pri $z=0$, naraščajo navzgor

b) Točen izračun: $g(r) = g(R_0)\cdot R_0^2\ \frac{1}{r^2}$ $\quad dr = dz$

$r = R_0 + z$

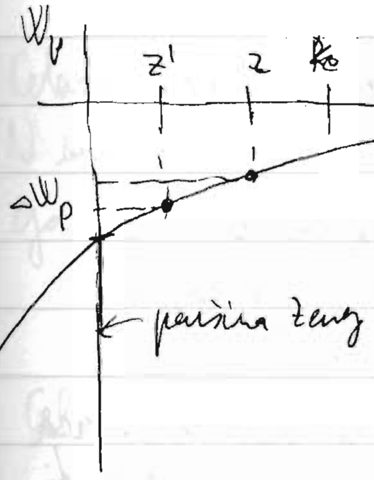
$$W_p - W_p' = m\cdot\int_{z'}^{z} g(z)dz = m\cdot\int_{z'}^{z} g(R_0)\cdot\frac{R_0^2}{r^2}\,dz =$$

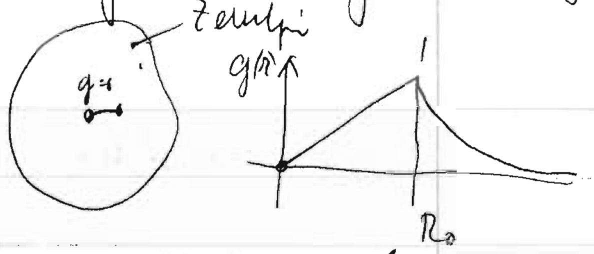
$$= m\cdot\int_{R_0+z'}^{R_0+z} g(R_0)\cdot R_0^2\cdot\frac{dr}{r^2} = m\cdot g(R_0)\cdot R_0^2\int_{R_0+z'}^{R_0+z}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= m\cdot g(R_0)\cdot R_0^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_0+z'}^{R_0+z} = -m\cdot g(R_0)\cdot R_0^2\left(\frac{1}{R_0+z} - \frac{1}{R_0+z'}\right)$$

$$\boxed{W_p(z) = -m\cdot g(R_0)\frac{R_0^2}{R_0+z}}$$

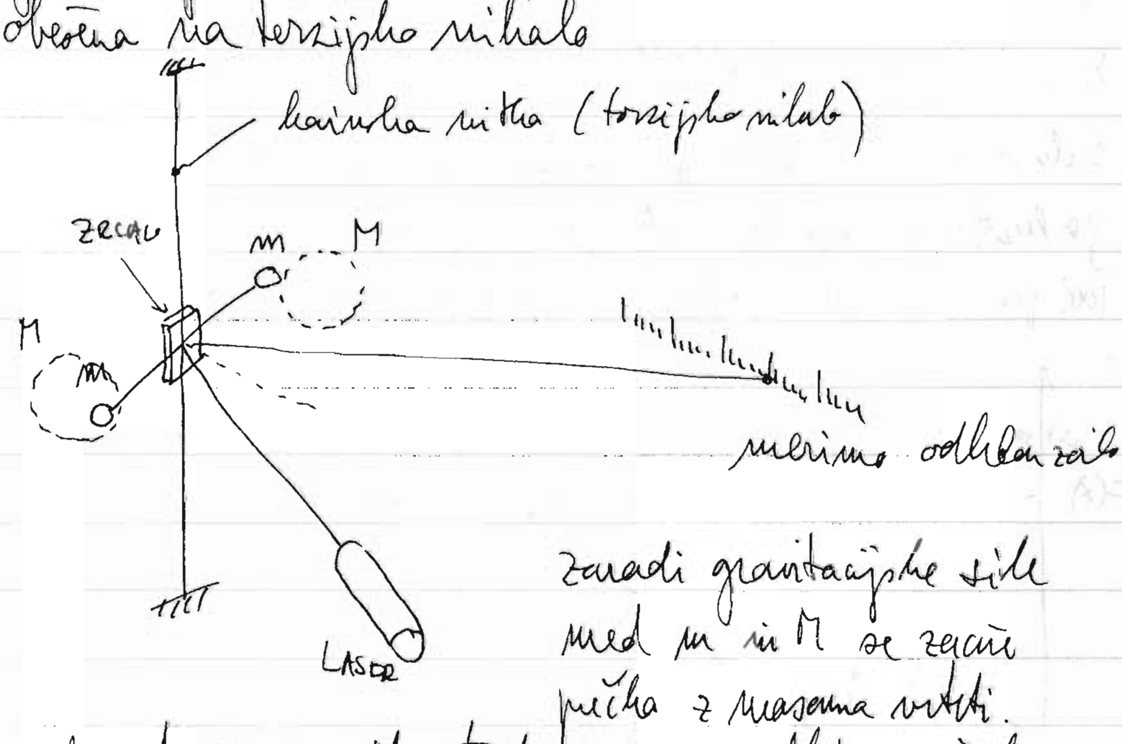
Premislek: g v notranjosti Zemlje





Potencialna energija je sicer negativna, ker pomeni, da moramo dovesti delo, da telo osvobodimo Zemljine gravitacije. To pomeni, da potencialna energija narašča, ko se oddaljujemo od Zemlje. V neskončni oddaljenosti je $W_p=0$

Poskus: merjenje gravitacijske konstante: Cavendisheva gravitacijska tehtnica – prečka z dvema masama, obešena na torzijsko nihalo



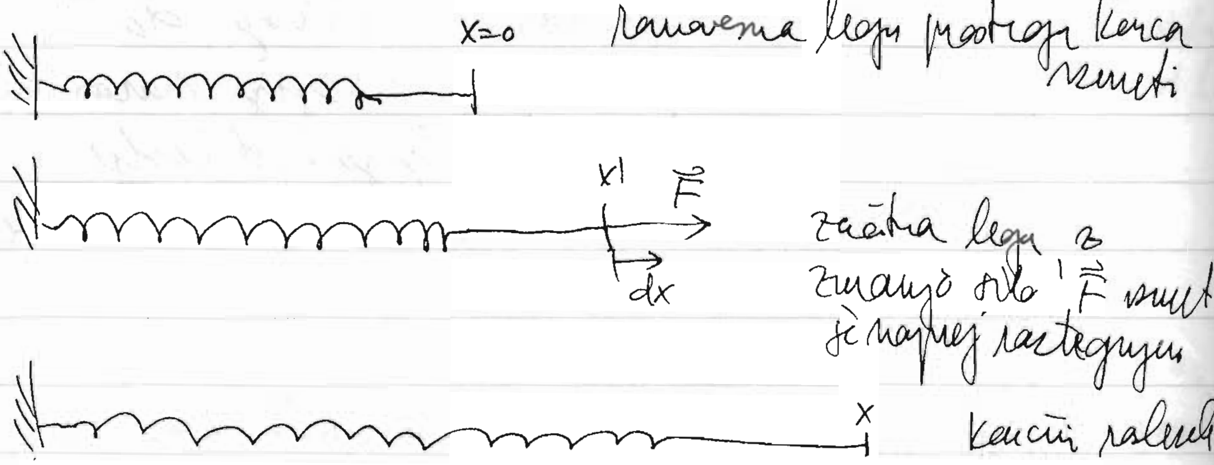
Zaradi gravitacijske sile med m in M se začne prečka z masama vrteti.

Ker se zrcalo vrti, se premika tudi pozicija odbitega žarka. Merimo pospešek, ki ga dobi prečka zaradi privlaka m in M.

$a = \frac{F}{m} = \frac{\gamma M}{r^2}$ (Če bi bila prosta, deluje pa torzijska sila, vendar je ta majhna → velik ~~[illegible]~~ nihajni čas nihala).

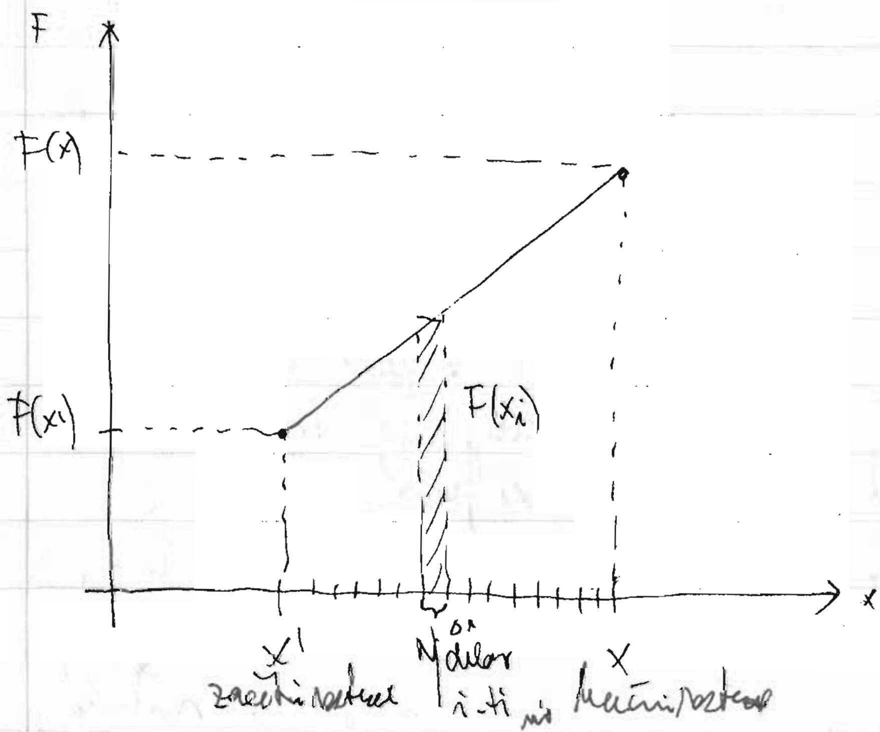
1.3.3. Prožnostna energija, konservativne sile

Poglejmo kolikšno delo opravimo, če vijačno vzmet stisnemo (ali raztegnemo) iz začetne lege x' v končno lego x.



x' ... začetni raztezek
x .... končni raztezek

Sila se ves čas povečuje, zato ne moremo dela izračunati po enostavni enačbi $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$, ker $\vec{F}$ ni konstanten. Pač pa narišemo odvisnost sile od raztezka:



$$dA_z = \vec{F}_z \cdot d\vec{x} = -\vec{F}_{vz} \cdot d\vec{x} = +k \cdot x\, dx$$
$$= -dA_{notranji}$$

Celotno delo izračunam tako, da interval (x', x) razdelim na N malih (dolgih) delov Δx. Za i-ti interval je delo, ki ga opravi zunanja sila:

$$\Delta A_i = F(x_i) \cdot \Delta x$$

Celotno delo dobim, če seštejem vsa ta dela:

$$A_N = (A_1 + A_2 + \dots + A_N) = \sum_{i=1}^{N} F(x_i) \Delta x$$

V limiti $N \to \infty$ je teh intervalov zelo veliko in so zelo celi. Vsota preide v določen integral:

$$\lim_{N\to\infty} A_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} F(x_i) \Delta x = \int_{x'}^{x} F(x)\, dx = A$$

$$A_{pr} = \int_{x'}^{x} k \cdot x \cdot dx = k \cdot \int_{x'}^{x} x\, dx = \frac{1}{2} k x^2 \Big|_{x'}^{x} = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x'^2$$

Delo je odvisno samo od začetnega in končnega raztezka, ne pa od tega, kako smo z vzmetjo počeli. Zato uvedem prožnostno energijo:

$W_{pr} = \frac{1}{2} k x^2$ $\quad x \dots$ raztezek (ali skrček) vzmeti

$$A_{pr} = W_{pr} - W'_{pr}$$

Pogosto v izrazu za delo ostalih sil izločimo delo, ki ga damo v potencialno energijo, tako da se energ. zakon glasi

$$\boxed{A_{\substack{\text{ostale sile}\\ \text{(brez gravit.}\\ \text{in prožnost)}}} = W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_{pr} - W_{pr}'}$$

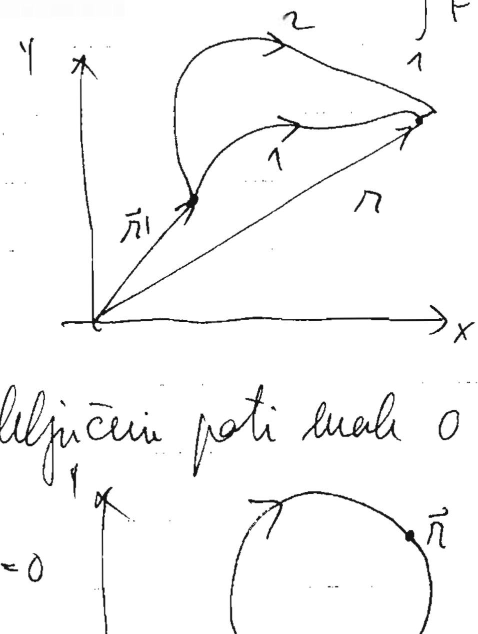
Če ni ostalih zunanjih sil, potem se energija (polna energija TT) ohranja.

Gravitacijska sila in sila vzmeti so t.im. konservativne sile. Sila je konservativna, če integral

$$\int_{\vec{r}\,'}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

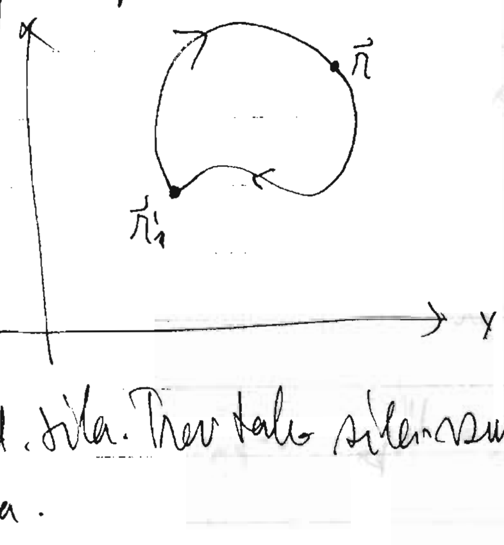
ni odvisen od poti:

$$\int_1 \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_2 \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r}$$



Ali če je integral po zaključeni poti enak 0:

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$$

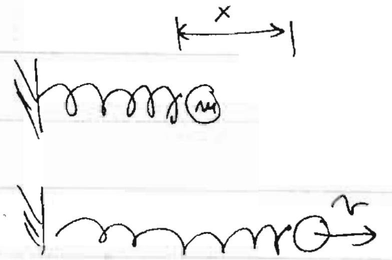


~~Pot~~ Sila gravitacije je konservat. sila. Prav tako sila vzmeti. Sila trenja ni konservativna.

Primer: Kroglico z maso 10g damo pred vzmet, ki smo jo stisnili za 3,2 cm, nato pa vzmet opustimo. Kolikšno hitrost ima kroglica, če je koef. vzmeti 7.5N/cm in kroglica odleti horizont.

Začetno stanje

Končno stanje



ravnovesna lega vzmeti.

Ni nobenih drugih zunanjih sil; $0 = W_k - W_k' + W_{pr} - W_{pr}'$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}kx^2$$

$$v = x\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = 3.2\,cm\cdot\sqrt{\frac{7.5N}{cm\cdot 10g}} = 3{,}2\cdot 10^{-2}m\cdot\sqrt{\frac{7.5\,kg\,ms^{-2}}{10^{-2}m\cdot 10^{-2}kg}} =$$

$$= 3{,}2\cdot 10^{-2}\,ms^{-1}\cdot\sqrt{\frac{7.5}{10^{-4}}} = 3.2\cdot\sqrt{7.5}\,ms^{-1} = 8{,}8\,ms^{-1}.$$

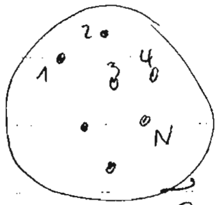
2. MEHANIKA SISTEMA DELCEV IN TOGIH TELES

Novo: težišče, vrtuji

2.1. Gibalna količina sistema delcev

Imamo sistem N točkastih teles. Masa posameznega delca je m_i, $\vec{r}_i$ pa njegova koordinata. Hitrost i-tega delca je

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$



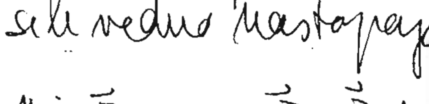
N teles.

Gibalna količina i-tega delca pa je $G_i = m_i \cdot \vec{v}_i$.
Definiram gibalno količino vseh teles kot vektorsko vsoto:

$$\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_N = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N$$

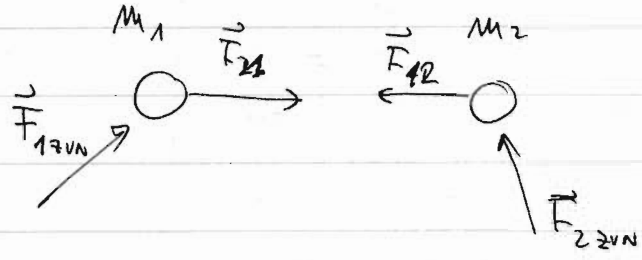
Zanima nas, kaj se dogaja z gibalno količino sistema delcev, če delci med seboj delujejo z notranjimi silami in obenem na delce delujejo še zunanje sile.

Notranje sile: sile med posameznimi delci v sistemu. Te sile vedno nastopajo v ~~parih~~ nasprotnih parih!



Zunanje sile: to so sile, ki jih povzročijo telesa izven sistema.

Zaradi enostavnosti vzamem samo 2 delca, nato pa posplošim na sistem N delcev.



$\vec{F}_{21}$ sila drugega delca na prvega (notr. sila)

$\vec{F}_{12}$ sila prvega delca na drugega (notr. sila)

$\vec{F}_{1zun}$ ... zunanja sila (ali rezult.) na prvi delec

$\vec{F}_{2zun}$ ... zun. sila na drugi delec.

Za posamezni delec zapišem 2. Newtonov zakon, ki ga zapišem v obliki spremembe gibalne količine:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{G}}{dt}$$

Za prvi delec velja:

$$\frac{d\vec{G}_1}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{1zun}$$

Za drugi delec velja:

$$\frac{d\vec{G}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{2zun}$$

To dvoje seštejem

$$\frac{d\vec{G}_1}{dt} + \frac{d\vec{G}_2}{dt} = \frac{d(\vec{G}_1 + \vec{G}_2)}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0 \text{ parorna nasprotni}} + \vec{F}_{1zun} + \vec{F}_{2zun}$$

$$= \cancel{\vec{F}_{zun}} = \vec{F}_{zun}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{G}}{dt} = \vec{F}_{zun}}$$

To lahko posplošim na N delcev. Vse notranje sile se parama unicajo, tako da na spremembo gibalne količine vplivajo samo zunanje sile:

$$\boxed{\frac{d(\vec{G}_1+\vec{G}_2+\ldots+\vec{G}_N)}{dt} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_{i\,zun}}$$

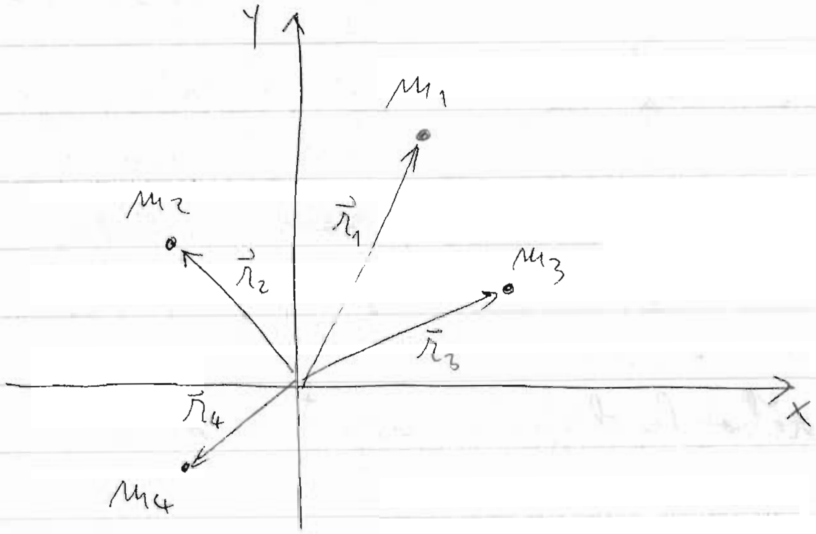
Sprememba gibalne količine sistema delcev v časovni enoti je enaka vsoti vseh zunanjih sil.
Vidimo, da za gibalno količino sistema delcev velja natanko isti zakon o ohranitvi gibalne količine kot za togo telo. Če zgornjo enačbo integriram, dobim:

$$\underbrace{\vec{G}-\vec{G}'}_{\text{sprem. gib. količine sistema delcev}} = \int_{\vec{G}'}^{\vec{G}} d\vec{G} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \vec{F}_{i\,zun}(t)\,dt}_{\text{sunek vseh zunanjih sil.}}$$

Sprememba gibalne količine sistema je enaka sunku zunanjih sil.

2.1.1. Gibanje težišča sistema delcev

Imejmo sistem N delcev z masami $m_1, m_2, \ldots, m_N$ in krajevnimi koordinatami $\vec{r}_i$



Definiram težišče sistema, ki je določeno s krajevnim vektorjem:

$$\vec{r}^* = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}$$

To predstavlja 3 skalarne enačbe za x^*, y^* in z^* komponente ~~kom~~ težišča:

$$x^* = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{M} \quad ; \quad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

skupna masa sistema

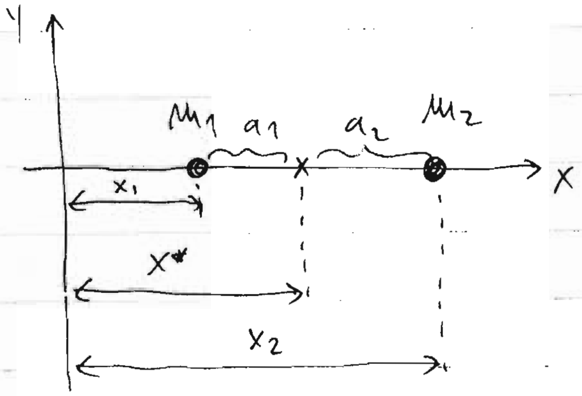
$$y^* = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{M}$$

$$z^* = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{M}$$

To si najbolje ponazorim z dvemi delci:

$$\vec{r}^* = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \quad \text{ali} \quad x^* = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1+m_2}$$

lega težišča, središča mas!



Da se pokazati, da je to enakovredno enačbi, ki jo poznamo iz srednje šole, t.j. $\underline{m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2}$

Pomnožimo enačbo, ki definira lego težišča z M:

$$M\cdot\vec{r}^* = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N$$

Sedaj odvajamo obe strani po času: $\frac{d}{dt}$

$$M\cdot\frac{d\vec{r}^*}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \dots + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}^*}{dt}}_{\vec{v}^* \text{ hitrost težišča}} \qquad \underbrace{\frac{d\vec{r}_1}{dt}}_{\text{hitrost } \vec{v}_1} \qquad \underbrace{\frac{d\vec{r}_2}{dt}}_{\vec{v}_2} \qquad \underbrace{\frac{d\vec{r}_N}{dt}}_{\vec{v}_N}$$

so $M\cdot\vec{v}^* = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m\cdot\vec{v}_N = \vec{G}$

Še enkrat odvajam po času obe strani, $\frac{d}{dt}$

$$M\cdot\frac{d\vec{v}^*}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \dots + m_N\frac{d\vec{v}_N}{dt}$$

$$M \cdot \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \frac{d\vec{G}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,zvn}$$

sprememba celotne gibalne količine na časovno enoto je enaka rezultanti vseh zun. sil.

$\|$

$\vec{a}^*$ pospešek težišča

$$\boxed{M \cdot \vec{a}^* = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,zun} = \vec{F}}$$

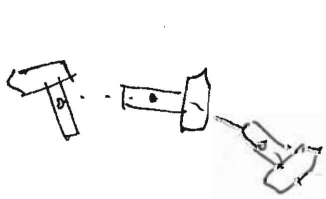
Vidimo, da za ~~ko~~ pospešek težišča velja 2. Newtonov zakon, če si mislimo, da je v težišču zbrana vsa masa telesa M.

Težišče sistema se giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa sistema in na katerega bi delovala vsota vseh zunanjih sil.
Gibanje sistema torej lahko obravnavamo kot gibanje TT, v katerem je zbrana vsa masa.

Primer: a) dva vozička, povezana z vzmetjo:

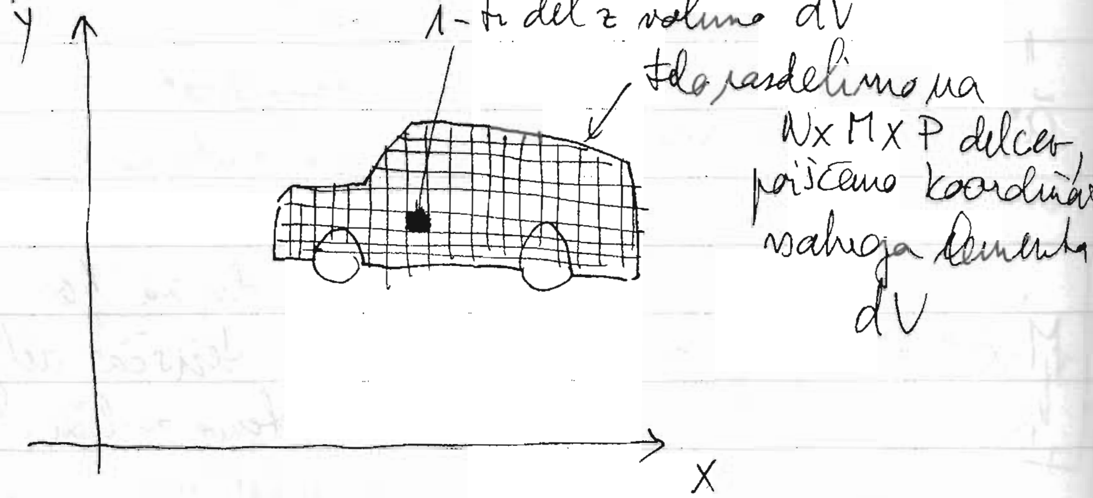
oznaka za težišče

b) met kladiva



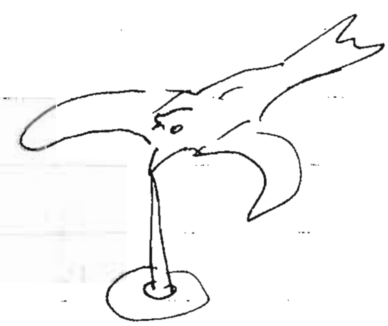
c) ognjemet – eksplozija rakete.

Kako pa v resnici računamo koordinate težišča?

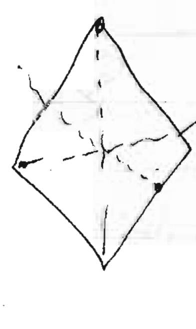


$$\boxed{\vec{r}^* = \frac{1}{M}\int \underbrace{\rho(\vec{r}_i)\cdot dV}_{dm_i}\cdot \vec{r} \; = m_1 + m \sum_{i=1}^{N}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_N\vec{r}_N\right)}$$

d) težišče telesa je lahko tudi izven telesa: model ptiča



e) določanje težišča togih teles z obešanjem:



2.1.2. Potencialna energija sistema delcev

Potencialno energijo sistema delcev obravnavamo v približku g = konst. Ker telesa niso velika, to praktično vedno velja. Za en sam delec imamo

$$W_p - W_p' = m_1 \cdot g (h_1 - h_1')$$

Potencialna energija N delcev je vsota:

$$W_p - W_p' = m_1 g (z_1 - z_1') + m_2 g (z_2 - z_2') + \ldots + m_N g (z_N - z_N') =$$

$$= g \Big[\underbrace{(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N)}_{= M \cdot z^*} - \underbrace{(m_1 z_1' + m_2 z_2' + \ldots + m_N z_N')}_{M \cdot z^{*\prime}} \Big]$$

$$= M \cdot g (z^* - z^{*\prime})$$

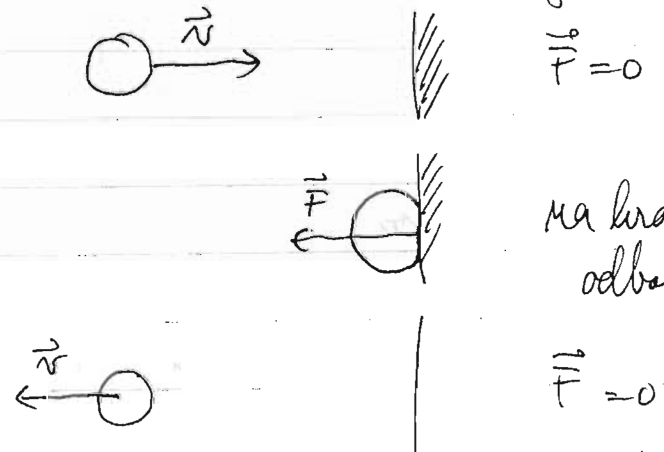
$$\boxed{W_p - W_p' = M \cdot g (z^* - z^{*\prime})}$$

Sprememba potencialne energije sistema je enaka spremembi potencialne energije težišča, v katerem je zbrana vsa masa sistema.

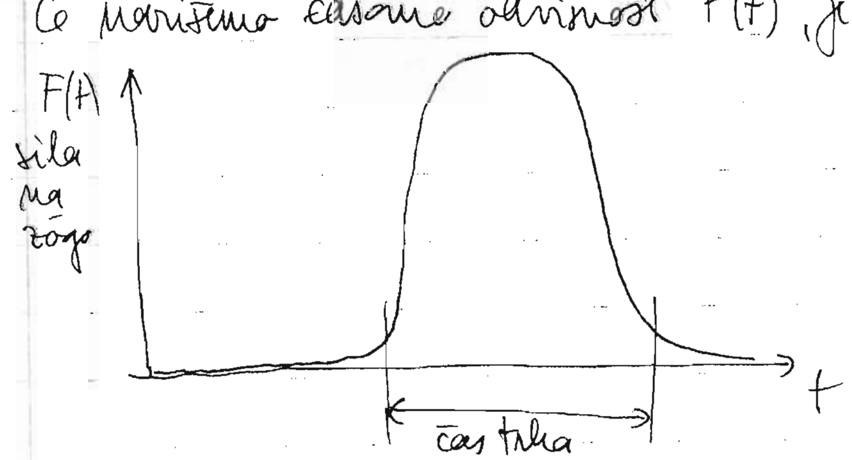
Primer: - skok v višino (Fosbury).

2.1.3. Elastični in neelastični trki

Trk dveh teles: pri takih dogodkih sile med dvema telesi delujejo samo v trenutku trka (kontakta), drugače pa so enake nič. Primer: trk žoge s steno.



Če narišemo časovno odvisnost $F(t)$, je ta impulzne oblike:



Če vzamemo vse delce, ki sodelujejo v trkih za sistem, potem je jasno, da se skupna gibalna količina vseh delcev ohranja, če ni zunanjih sil. Gibalna količina (skupna) se ohranja, tudi če so trki neelastični. Glede na kinetično energijo delcev, ki sodelujejo pri trkih pa ločimo.

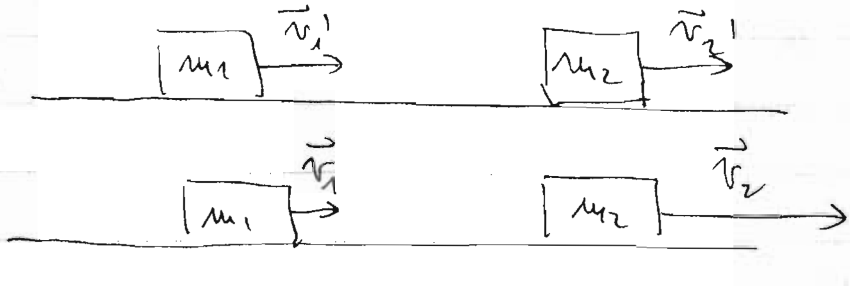
a) elastični trk: ohranja se skupna gibalna količina, prav tako se ohranja skupna kinetična energija delcev, ki je enaka vsoti kinetičnih energij posameznih delcev.

b) neelastični trki: ohranja se skupna gibalna količina delcev, ne ohranja pa se skupna kinetična energija delcev. Del kinetične energije delcev se pretvori v notranjo energijo, telesa se segrejejo zaradi plastičnih deformacij. Ohranja pa se celotna energija vseh delcev, ki kateri štejemo tudi notranjo. Skrajni primer neelastičnega trka je trk, po katerem se delci sprimejo.

ad a) primer elastičnega trka v eni razsežnosti:

pred trkom:

po trku:



1. ohranitev gib. količine: $m_1 v_1 + m_2 v_2 - (m_1 v_1' + m_2 v_2') = 0$

2. ohranitev skupne kinetične energije:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2\right) = 0$$

ad1) $m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$

ad2) $m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$ | delimo drugo enačbo s prvo dobim $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$

preuredba $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \Rightarrow v_2 = v_2' - \frac{m_1}{m_2}(v_1 - v_1')$

$$v_1 = v_2 + v_2' - v_1' = \cancel{v_2}\ v_2' + \frac{m_1}{m_2}(v_1' - v_1) + v_2' - v_1' =$$

$$= v_1'\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) + \cancel{v_2'} + 2v_2' - \frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$v_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_2} v_1' + 2v_2'$$

$$\boxed{v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1' + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2'}$$

Enačbo za končno hitrost v_2 dobim z zamenjavo indeksov $\begin{smallmatrix}1\to2\\2\to1\end{smallmatrix}$

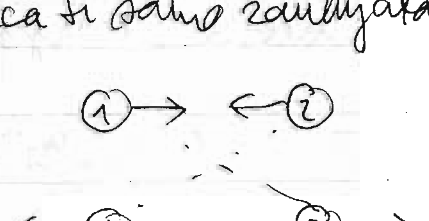
lahko preizkusite.

$$\boxed{v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2' + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1'}$$

Poglejmo si posebne primere:

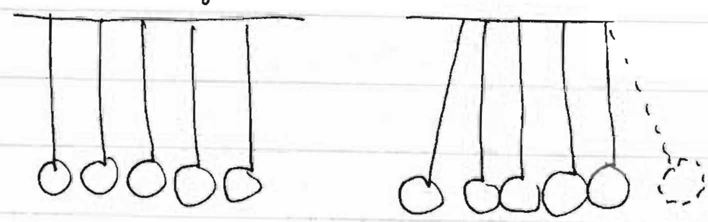
i) $m_1 = m_2$

$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_2' \\ v_2 = v_1' \end{array}\right\}$ delca si samo zamenjata hitrosti!



ii) $m_1 = m_2$, $v_2' = 0 \Rightarrow v_2 = 0$, $v_1 = v_2'$

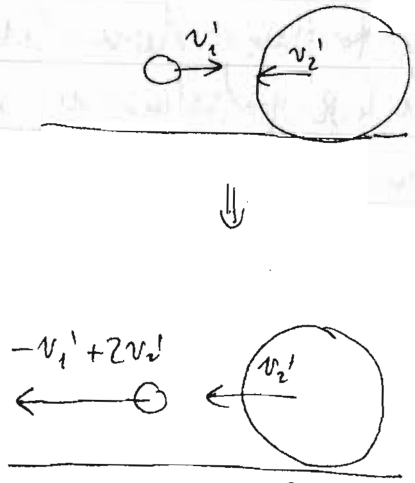
Pokaži:



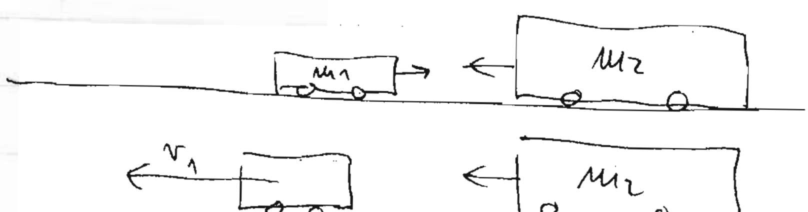
iii) $m_1 \ll m_2$

$v_1 \approx -v_1' + 2v_2'$

$v_2 \approx v_2'$

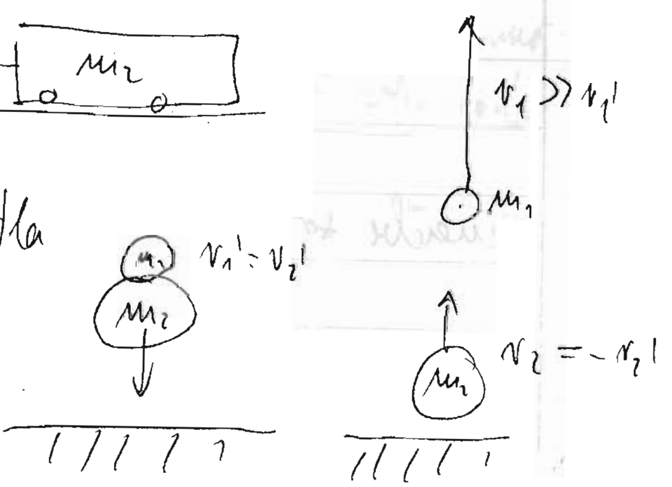


Mala kroglica se odbije z mnogo večjo hitrostjo.
Pokaži trk velikega in malega vozička na zračni progi



Pokaži padec dveh kroglic na tla

Trk dveh avtomobilov!

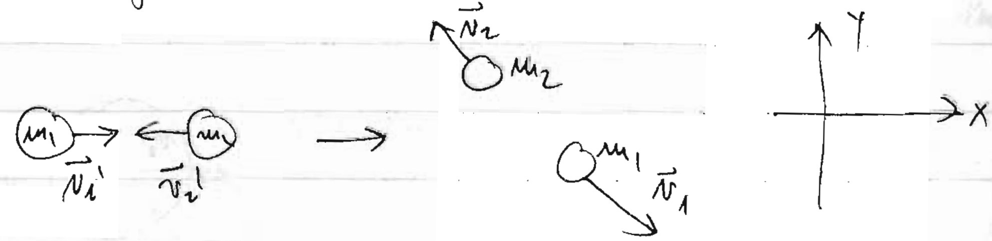


ad b) primer neelastičnega trka: telesi se sprimete, potem ko trčita. To je ekstremen primer. V tem primeru velja samo ohranitev gibalne količine

$$m_1 v_1 + m_2 v - (m_1 v_1' + m_2 v_2') = 0$$

$$\boxed{v = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}}$$

Pogosto imamo trke v dveh dimenzijah (to je ravnina). V teh primerih je potrebno upoštevati ohranitev obeh komponent gibalne količine (G_x in G_y):



ohranitev gibalne količine:

$$m_1 \vec v_1 + m_2 \vec v_2 - (m_1 \vec v_1' + m_2 \vec v_2') = 0 \quad \text{posebej za } x \text{ in}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} - (m_1 v_{1x}' + m_2 v_{2x}') &= 0 \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} - (m_1 v_{1y}' + m_2 v_{2y}') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

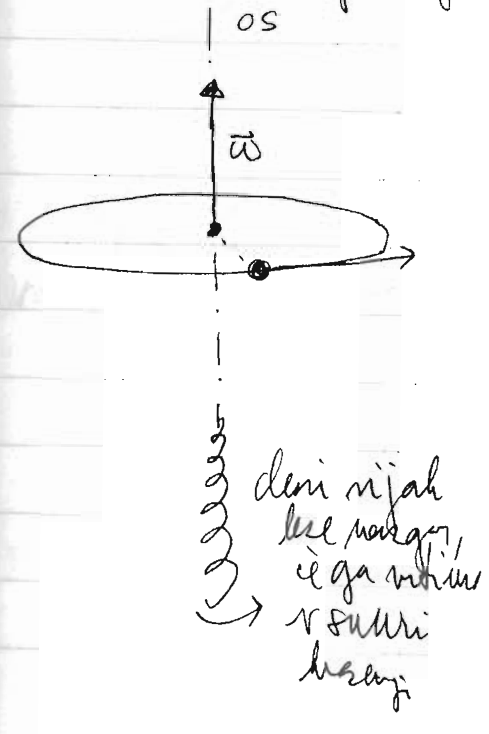
Enačbe so dosti bolj komplicirane!

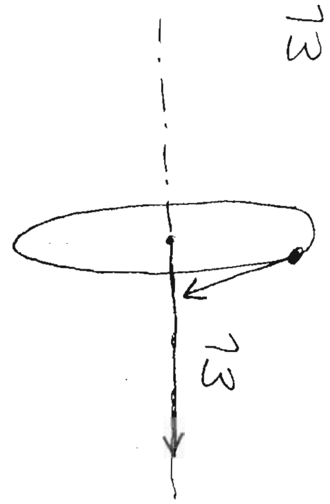
2.2. Mehanika togega telesa

Togo telo je tisto, ki je trdno v primerjavi s silami, ki na to telo delujejo. Togo telo se ne deformira pod vplivom zunanjih sil, elastične deformacije bomo obravnavali posebej.

2.2.1. Vrtenje togega telesa okoli stalne osi

Najprej se spomnimo kroženje enega samega točkastega telesa okoli stalne osi. Telo kroži v stalni razdalji od osi s kotno hitrostjo ω. Opazimo, da telo lahko kroži v levo ali desno smer. Torej kroženju na nek način lahko pripišemo vektor, saj ima smer. Vrtenje ima torej vektorski značaj, ki ga izrazimo tako, da si kotno hitrost ω predstavljamo kot vektor $\vec{\omega}$: smer $\vec{\omega}$ določimo po pravilu desnega vijaka.

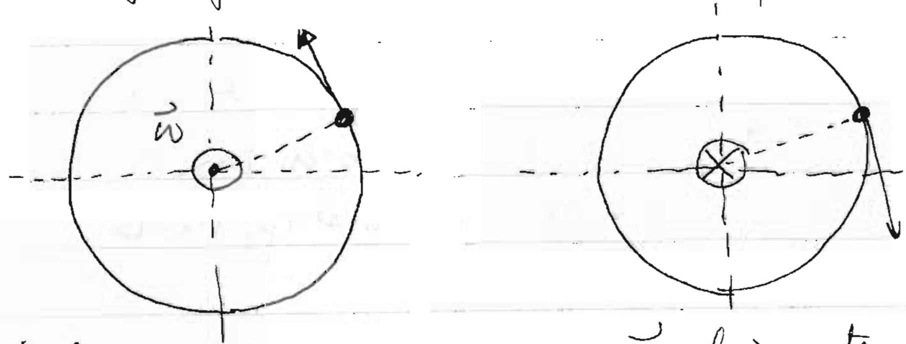




$\vec{\omega}$.... vektor kotne hitrosti

$|\vec{\omega}| = 2\pi\nu$, tako kot prej, samo smer smo dodali.

Če kroženje gledamo vzdolž osi kroženja, vidimo:

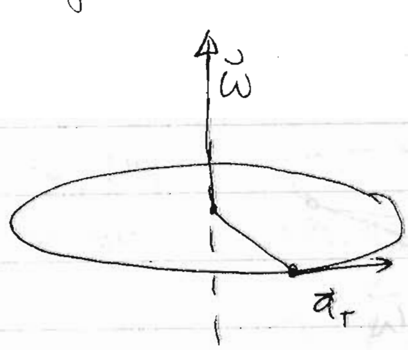


$\vec{\omega}$ kaže ven iz zvezka $\qquad$ $\vec{\omega}$ kaže noter v zvezek

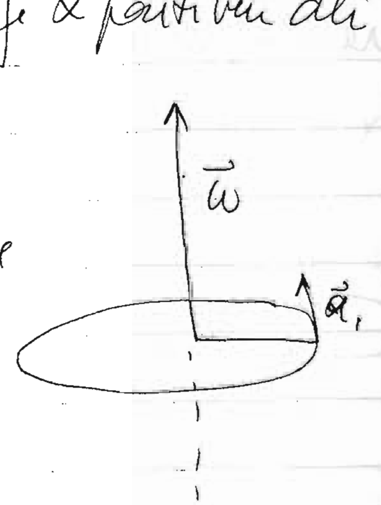
⊙ $\qquad$ ⊗ $\qquad$ smer indijanske puščice

Če je kroženje pospešeno, potem vemo, da je prisoten kotni pospešek α, ki opredeljuje kotno hitrost po enačbi ~~α~~ $\omega = \omega' + \alpha \cdot t$

α mora tudi imeti vektorski značaj, $\vec{\alpha}$ smer je ista ali negativna kot $\vec{\omega}$, odvisno ali je $\vec{\alpha}$ pozitiven ali negativen:



naslednji korak $\vec{\omega}$ povečan →



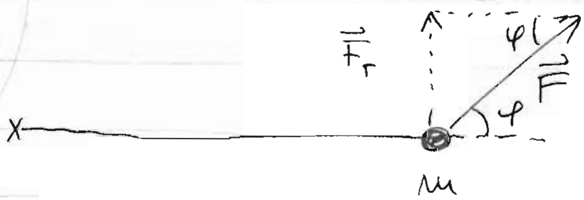
torej ima $\vec{\alpha}$ v tem primeru isto smer kot $\vec{\omega}$, če pa zavira vrtenje, je smer obratna.

Velja torej tudi vektorska zveza:

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}' + \vec{\alpha} \cdot t}$$

tudi kotni pospešek $\vec{\alpha}$ lahko smatramo za vektor.

Sedaj pa povežimo kotni pospešek α s tangentnim pospeškom a_T; velja $a_T = \alpha \cdot r$.
Če naj se telo giblje tako da je kroženje pospešeno, potem mora na to telo delovati zunanja sila, ki bo kroženje pospeševala:



Očitno lahko pospešeno kroženje povzroči samo tangentna komponenta sile $\vec{F}$:

$$F_T = F \cdot \sin\varphi$$

Po 2. Newtonovem zakonu ta komponenta sile daje telesu tangentni pospešek:

$$F_T = m \cdot a_T = m \cdot r \cdot \alpha$$

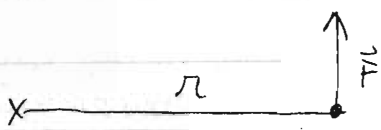
$$F \cdot \sin\varphi = m \cdot r \cdot \alpha \qquad / \cdot r \quad \text{pomnoži obe strani z } r:$$

$$F \cdot r \cdot \sin\varphi = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

Količino $F \cdot r \cdot \sin\varphi$ imenujem velikost navora sile:

$$M = F \cdot r \cdot \sin\varphi$$

Navor je največji, če je sila ~~največja~~ pravokotna na ročico ali $\varphi = \pi/2$



največji navor   navor $M = 0$

Količino $m \cdot r^2 = J$ imenujemo vztrajnostni moment točkastega telesa, tako da se enačba za navor glasi:

$$M = J \cdot \alpha$$

Na to lahko damo še vektorske znake:

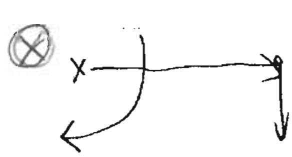
$r \cdot F \cdot \sin\varphi = |\vec{M}|$ $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin\varphi$

$\Downarrow$ $\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

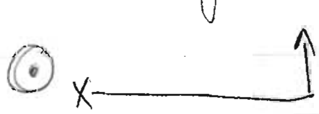
$$\boxed{\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}}$$

Čim večji navor je zmanjši sili, tem večji je kotni pospešek.

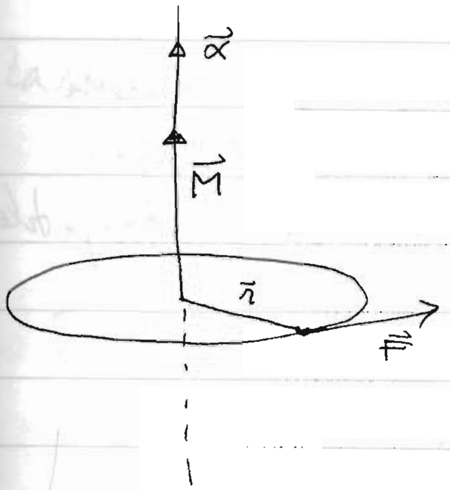
Navor je lahko pozitiven ali negat. Pozitiven navor vrti v smeri desnega vijaka, negativni pa obratno.



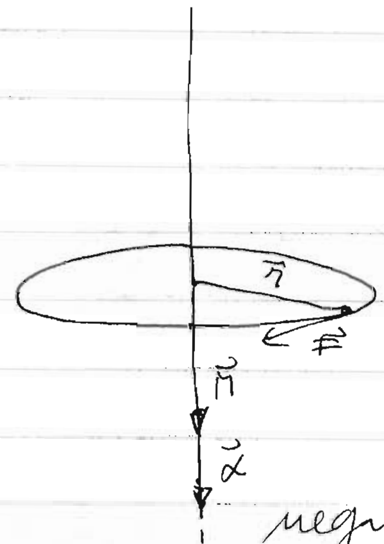
$\vec{M}$ pozitiven v tablo
desna smer



$\vec{M}$ ~~negativen~~ ven iz table
leva smer



pozitiven navor



negativen navor.

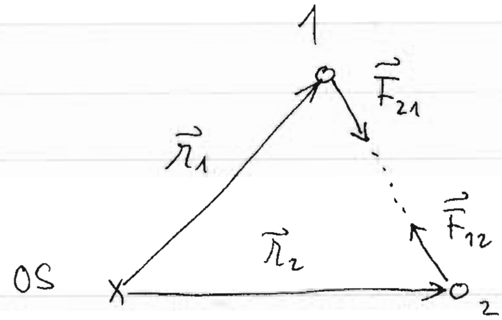
Enota za navor: [N m], formalno enaka [J], vendar vedno pišemo kot [N·m]

Enota za vztrajnostni moment: [$kg\,m^2$].

Vztrajnostni moment je večji, če je masa na večji razdalji od osi.

Poglejmo, kako je sedaj z vrtenjem togega telesa. Togo telo si mislimo sestavljeno iz zelo velikega števila točkastih teles. Na ta točkasta telesa delujejo zunanje in notranje sile. Glede na dano os, imamo tudi navore zunanjih in navore notranjih sil. Skupen navor vseh sil na to telo pri dani osi bo enak vsoti vseh navorov.

Poglejmo, kako je z vsoto ~~sil~~ navorov notranjih sil, ki vemo da nastopajo v parih:



Poglejmo, kaj se zgodi z navori notranjih sil, ki delujejo med sosednjimi deli togega telesa

Skupni navor:

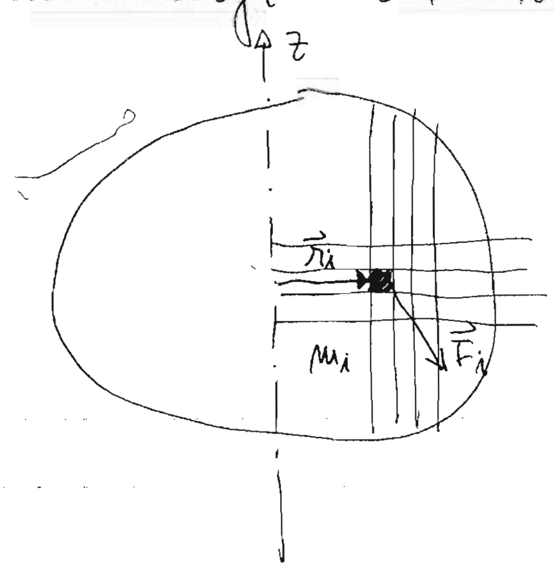
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \overset{-\vec{F}_{21}}{\overset{\parallel}{\vec{F}_{12}}} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} =$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\text{leži vzdolž } \vec{F}_{21}} \times \vec{F}_{21} = 0$$

Navor sile, ki leži vzdolž ročice, je enak nič.

Navor notranjih sil je torej paroma izničen zaradi 3. Newtonovega zakona. Telo občuti samo navor zunanjih sil, ki lahko povzroča vrtenje togega telesa.

Telo si predstavljamo, da je razdeljeno na N delov,
m_i .... masa i-tega dela telesa, ki je majhna
$\vec{r}_i$ .... razdalja i-tega dela telesa od stalne osi
$\vec{F}_i$ ..... zunanja sila na i-ti del telesa:



K vrtenju okoli osi z prispeva samo komponenta navora v smeri osi z!! Samo ta lahko vrti.

Za vsak majhen del telesa velja: Kot je znano: vzamem samo komponento M_z v smeri osi

$$\vec{M}_{i(zun)} = m_i \cdot r_i^2 \, \vec{\alpha}_i \qquad i = 1, \dots N$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_{i\,zun} = M_{zun} = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \, \alpha_i = \alpha_i \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2$$

enak za vse dele telesa

$$\boxed{M_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot r_i^2 \right) \alpha}$$

M_z ... navor zunanjih sil

To enačbo napišem v obliki: $\boxed{M = J \cdot \alpha}$

navor zun. sil

vztrajnostni moment telesa

kotni pospešek

Vztrajnostni moment togega telesa glede na stalno os:

$$\boxed{J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2}$$

r_i .... razdalja od osi

m_i .... masa i-tega dela telesa

Pozor!! Vztrajnostni moment je odvisen od izbire osi!!

Če povečujem $N \to \infty$, kar pomeni, da telo razdelim na vedno manjše dele, $m_i \to dm$. Vsota preide v integral

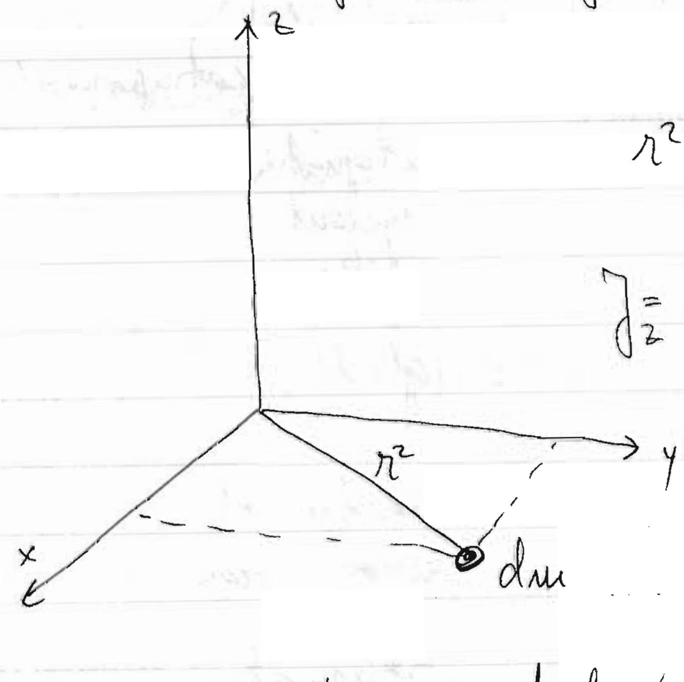
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int_V r^2\, dm$$

Vsota preide v določeni integral po celem telesu.

Vztrajnostni moment teles torej izračunam z integracijo:

$$J = \int_{\text{po telesu}} r^2\, dm = \int_{\text{po telesu}} r^2 \cdot \rho(r)\, dV$$

Kartezično: običajno os vrtenja postavimo v os z:

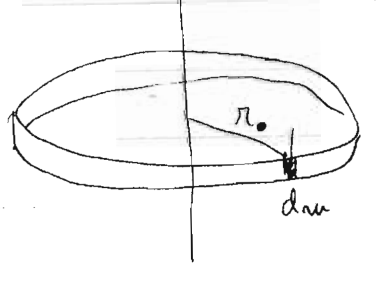


$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_z = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} dx\,dy\,dz\; \rho(x,y,z)\,(x^2+y^2)$$

Izgleda komplicirano, vendar se poenostavi, če je telo urejene oblike.

Primer: vztrajnostni moment obroča

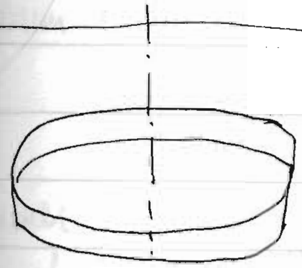
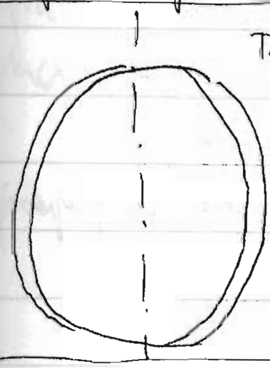
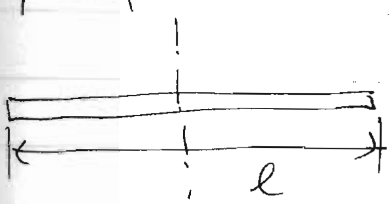
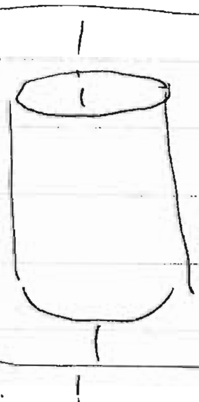
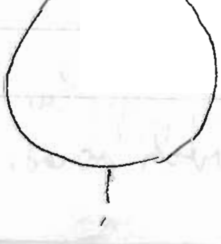


$$J = \int_{\text{po obroču}} r_0^2\, dm = r_0^2 \cdot \int dm = r_0^2 \cdot m$$

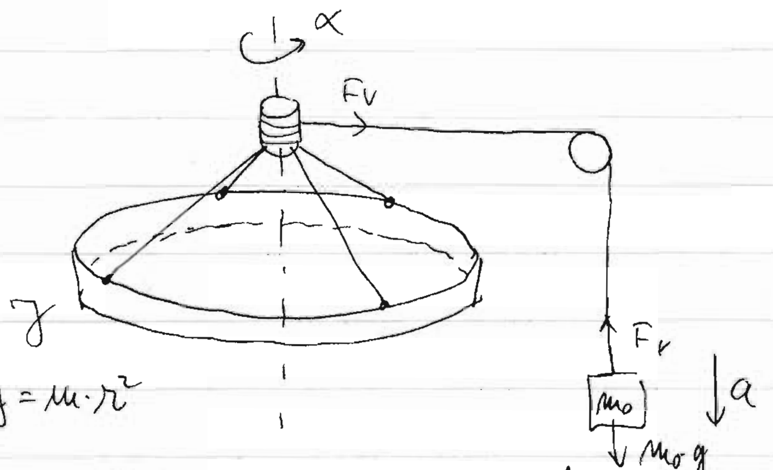
Steinerjev izrek : $J = J^* + m r^2$ r razdalja med os

J^* glede na težišče

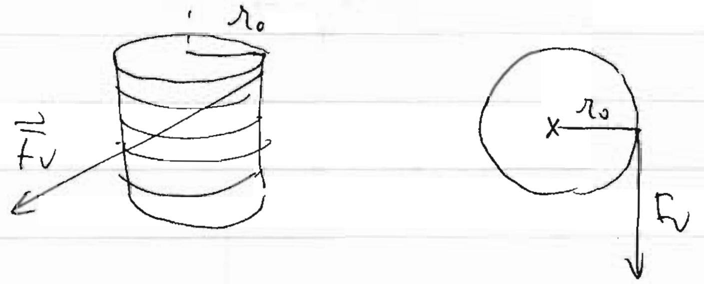
Pravilna geometrijska telesa imajo lepo izračunljive vztrajnostne momente. Primeri:

Telo	J
 Tanek obroč, os vrtenja v geometrijski osi	$J = m\cdot r^2$
 Tanek obroč, os v ravnini obroča	$J = \frac{1}{2} m r^2$
palica, os v središču 	$J = \frac{1}{12} m l^2$
valj: 	$J = \frac{1}{2} m r^2$
krogla: 	$J = \frac{2}{5} m r^2$

Primer 1: Kolo na vretenu:



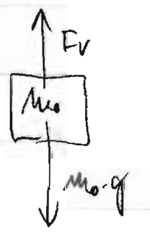
Kolo pospešujemo preko navora sile vrvice na vretenu



$M_v = r_0 \cdot F_v$

to je navor, ki pospešuje kolo

a) gibanje uteži:



$$m_0 g - F_v = m_0 a$$

$$F_v = m_0(g-a)$$

b) na vreteno deluje navor $M_v = r_0 \cdot F_v$. Ta navor povzroča pospešeno vrtenje ~~ko~~ obroča

$$M = J\cdot\alpha$$

$$F_v \cdot r_0 = J\cdot\alpha = m_0(g-a)r_0 = J\cdot\alpha$$

Velja še ~~$\alpha_T =$~~ $a_T = \alpha \cdot r_0 = a$

$$m_0(g - \alpha\cdot r_0)r_0 = m_0 \cdot g\cdot r_0 - m_0 r_0^2\cdot\alpha = J\cdot\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_0\cdot g\cdot r_0}{J + m_0 r_0^2}}$$

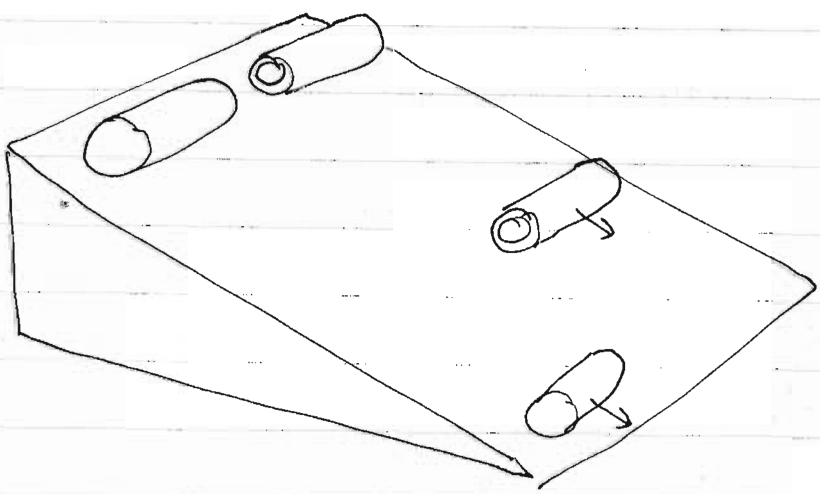
s takšnim pospeškom se začne vrteti obroč

Če je vztrajnostni moment kolesa večji, je α manjši.

$$\alpha = \frac{\omega}{t}$$

Merim kotno hitrost, ki jo kolo doseže po določenem času

Primer 2: votli in polni valj na klancu. Vzamemo dva valja, ki imata isto maso. Eden je votel, drugi pa poln. Valja damo na klanec, da se zakotalita. Kateri valj pride prej do dna? Polni valj ima manjši vztrajnostni moment, prvi pa večjega.



Oba valja popeljeta enako velika komponenta sile teže. Vendar, ker se valj kotali in ne drsi, ta sila tudi povzroča rotacijo. Lažje se zavrti tisti valj, ki ima manjši vztrajnostni moment.

2.2.2. Izrek o ohranitvi vrtilne količine pri vrtenju okoli stalne osi

Izhajamo iz enačbe za vrtenje, ki smo jo dobili za togo telo:

$$M_z = J_z \cdot \alpha = J_z \frac{d\omega}{dt} \qquad / \cdot dt$$

$$M_z dt = J_z d\omega$$

$$\int_{t'}^{t} M_z(t)\,dt = J_z \int_{\omega'}^{\omega} d\omega = J_z \omega - J_z \omega' = \Gamma_z - \Gamma_z'$$

Dobimo izraz $\boxed{\int_{t'}^{t} M_z(t)\,dt = \Gamma_z - \Gamma_z'}$ Γ ..... vrtilna količina togega telesa pri vrtenju okoli stalne osi.

$\left(\Gamma = \frac{d\Gamma}{dt}\right.$ diferencialno$\left.\right)$

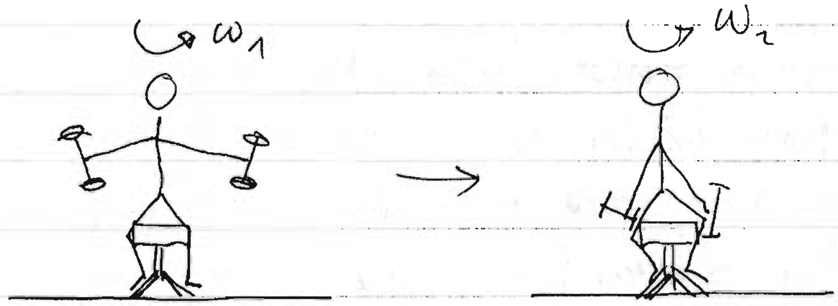
Izraz $\int_{t'}^{t} M_z(t)\,dt$ imenujemo sunek navora zunanjih sil glede na stalno os

$\boxed{\Gamma_z = J_z \cdot \omega}$ ..... komponenta vrtilne količine telesa v smeri nepremične osi z

Sunek navora zunanjih sil je enak spremembi komponenti vrtilne količine telesa v smeri nepremične osi.

Pozor: navedeni izrek velja samo za sunek sil, ki delujejo v ravnini, pravokotni na os vrtenja.

Primer 1: mož na stolu z utežmi



Hitrost vrtenja se poveča. Zakaj? Zato ker se je zmanjšal vztrajnostni moment. Velja namreč, da je vseeno, ali se spremeni ω ali J, važen je $\Gamma = J \cdot \omega$, ki se v tem primeru ohranja.

$$\int M(t)\,dt = 0 \Rightarrow J_1 \omega_1 - J_2 \omega_2 = 0$$

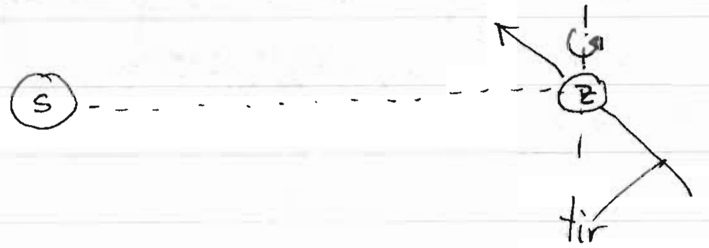
Primer 2: Mož s kolesom na vrtljivem stolu.
Cel sistem je sestavljen iz dveh delov: kolesa in moža. Skupna vrtilna količina je kar vsota obeh vrtilnih količin:

$$\vec{\Gamma}_z = \underbrace{\vec{\Gamma}_{1z}}_{\text{mož}} + \underbrace{\vec{\Gamma}_{2z}}_{\text{kolo}}$$

Skupna vrtilna količina je enaka 0, ker ni zunanjih sil. Če se kolo zavrti v eno stran, se človek zavrti v drugo smer.

2.2.3. Lastna in tirna vrtilna količina togega telesa

Poglejmo primer togega telesa, naprimer Zemlje, ki se vrti okoli svoje težiščne osi, obenem pa se giblje po krožnem tiru okoli Sonca. Vprašamo se, kolikšna je vrtilna količina v tem primeru: <u>Os vrtenja ni več stalna</u> !!



očitno gre za dve vrsti vrtilne količ.
- lastna vrtilna količina, ki prihaja od vrtenja okoli osi

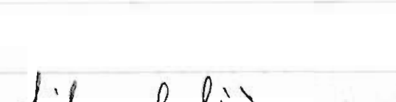
in tirne vrtilne količine zaradi kroženja Zemlje okoli Sonca. Pri togem telesu torej ločimo dve vrsti vrtilne količine: tirno in lastno.

Preden pogledamo podrobno, poglejmo ~~kaj~~ kako se izraža ~~vr~~ vrtilna količina pri kroženju točkastega telesa:

$$\Gamma = J\omega = mr^2\omega = m\cdot r\cdot \overbrace{(r\cdot\omega)}^{v} = m\cdot r\cdot v = r\cdot mv = r\cdot G$$

$\vec{\Gamma} \rightarrow$ ima isto smer kot $\vec{\omega}$

$G \ldots$ gib. kol.



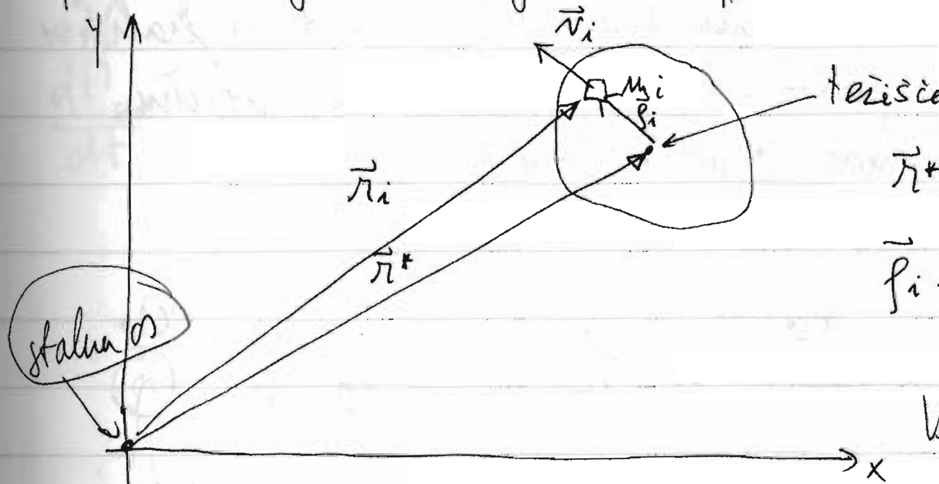
$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{G}}$$

Vrtilna količina točkastega telesa glede na os je torej vektorski produkt radija in gibalne količine.

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \int \vec{r} \times d\vec{G}}$$

splošna definicija vrtilne količine glede na izbrano os.

Posplošimo sedaj to na togo telo: premično os postavimo v težišče!



$\vec r^*$ ... koordinata težišča

$\vec\rho_i$ ... lega i-tega dela telesa glede na težišče

Velja: $\vec r_i = \vec r^* + \vec\rho_i$

Vrtilna količina togega telesa glede na koordinatno izhodišče (ki je stalna os) je vsota vrtilnih količin vseh delov telesa:

$$\vec\Gamma_{\substack{\text{stalna}\\ \text{os}}} = \vec r_1 \times (m_1\vec v_1) + \vec r_2 \times (m_2 \vec v_2) + \dots + \vec r_N \times (m_N \vec v_N) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec r_i \times (m_i \cdot \vec v_i) \qquad , \quad \vec r_i = \vec r^* + \vec\rho_i$$

$$\vec\Gamma_{\substack{\text{stalna}\\ \text{os}}} = \sum_{i=1}^{N} (\vec r^* + \vec\rho_i) \times (m_i \vec v_i) = \sum_{i=1}^{N} \overset{\text{isti za vse člene}}{\vec r^*} \times (m_i \vec v_i) + \sum_{i=1}^{N} \vec\rho_i \times (m_i \vec v_i) =$$

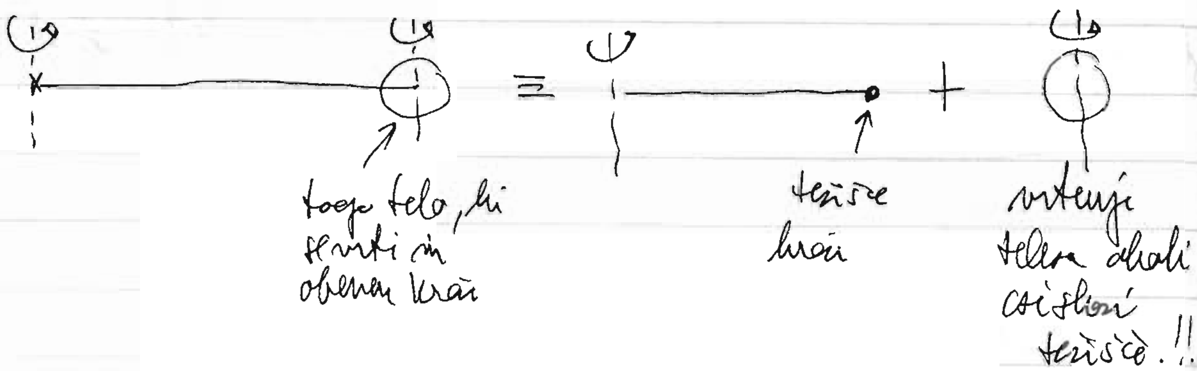
$$= \vec r^* \times \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec v_i}_{= M\cdot\vec v^*}\Big) + \sum_{i=1}^{N} \vec\rho_i \times (m_i \vec v_i) =$$

$$= \underbrace{\vec r^* \times M \cdot \vec v^*}_{\substack{\text{vrtilna količina težišča}\\ \text{glede na izhodišče = tirna vrtilna količina}}} + \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec\rho_i \times (m_i \vec v_i)}^{\text{vrtilna količina}}$$

vrtilna količina telesa pri vrtenju okoli osi skozi težišče, ki se giblje:

vrtilna količina težišča glede na izhodišče = tirna vrtilna količina

Vrtilno količino togega telesa pri splošnem ravnem gibanju si torej lahko mislimo sestavljeno iz tirne vrtilne količine težišča (vsa masa zbrana v težišču) in vrtilne količine zaradi vrtenja telesa okoli težiščne osi:



$$\boxed{\vec{\Gamma}_{\substack{stalna\\ os}} = \vec{\Gamma}_{tir} + \vec{\Gamma}^{*}_{\substack{okoli\\ težišča}}}$$

$\vec{\Gamma}_{\substack{stalna\\ os}}$ ... skupna vrtilna količina glede na nepremično os.

$\vec{\Gamma}_{tir}$ ... tirna vrtilna količina težišča

$\vec{\Gamma}^{*}_{\substack{okoli\\ težišča}}$ ... vrtilna količina telesa glede na težišče.

Poglejmo, ali za vrtilno količino pri gibljivi osi zares velja izrek o navorih, ki je veljal za stalno os?
Za stalno os smo imeli

$$\Gamma_z - \Gamma'_z = \int M_z(t)\,dt$$ sprememba komp. vrtilne količine okoli stalne osi (v smeri z-ja)

$$\Downarrow$$

$$M_z = \frac{d\Gamma_z}{dt}$$ ali kaj podobnega velja tudi za težiščno os, ki je prosta?

$$\vec{r}_i = \vec{r}^* + \vec{\rho}_i$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}$$

$$\sum \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i \Big(\overset{\vec{v}_i}{\frac{d\vec{r}_i}{dt}} - \vec{v}^*\Big) \times m_i \vec{v}_i =$$

$$= \sum_i \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{0} - \sum_i \vec{v}^* \times m_i \vec{v}_i =$$

$$= -\vec{v}^* \times \sum_i m_i \vec{v}_i =$$

$$= -\vec{v}^* \times M \cdot \vec{v}^* = 0$$

Izračunajmo torej $\frac{d\vec{\Gamma}_{stalen}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{\Gamma}_{stal}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(\underbrace{\vec{r}^* \times M\vec{v}^*}_{\text{tirna vrt. količina}}\big) + \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times (m_i \vec{v}_i)\Big) =$$

$$= \underbrace{\overset{\vec{v}^*}{\frac{d\vec{r}^*}{dt}} \times M \cdot \vec{v}^*}_{=0} + \vec{r}^* \times \Big(M \cdot \frac{d\vec{v}^*}{dt}\Big) + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \times (m_i \vec{v}_i)}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times \Big(m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}\Big) =$$

OK

$$= \vec{r}^* \times \underbrace{(M \cdot \vec{a}^*)}_{(\sum \vec{F}_{ZUN})} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\rho}_i \times (m_i \vec{a}_i) =$$

$\vec{F}_{zun}$ ... vsota zunanjih sil

$$= \underbrace{\vec{r}^* \times (\sum \vec{F}_{ZUN})}_{\text{Navor rezultante zunanjih sil, ki prijemlje v težišču} = \vec{M}_o^*} + \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{\rho}_i \times \vec{F}_{iZUN}}_{\text{Navor i-te zunanje sile z ročico } \vec{\rho}_i \text{ do težišča}} =$$

$$= \vec{M}_o^* + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iZUN}$$

$$\frac{d\vec{\Gamma}_{stat}}{dt} = \underbrace{\vec{M}_o^*}_{} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iZUN} = \underbrace{\frac{d\vec{\Gamma}_{tir}}{dt}}_{} + \frac{d\vec{\Gamma}_{težišč}}{dt}$$

To ni čisto v redu ne moreš separirati!!

Od tu dobiš:

$$\boxed{\frac{d\vec{\Gamma}_{tir}}{dt} = \vec{r}^* \times (\sum \vec{F}_{zun})}$$

tirno vrtilno ~~količino~~ spreminja navor rezultante vseh sil, ki prijemlje v težišču

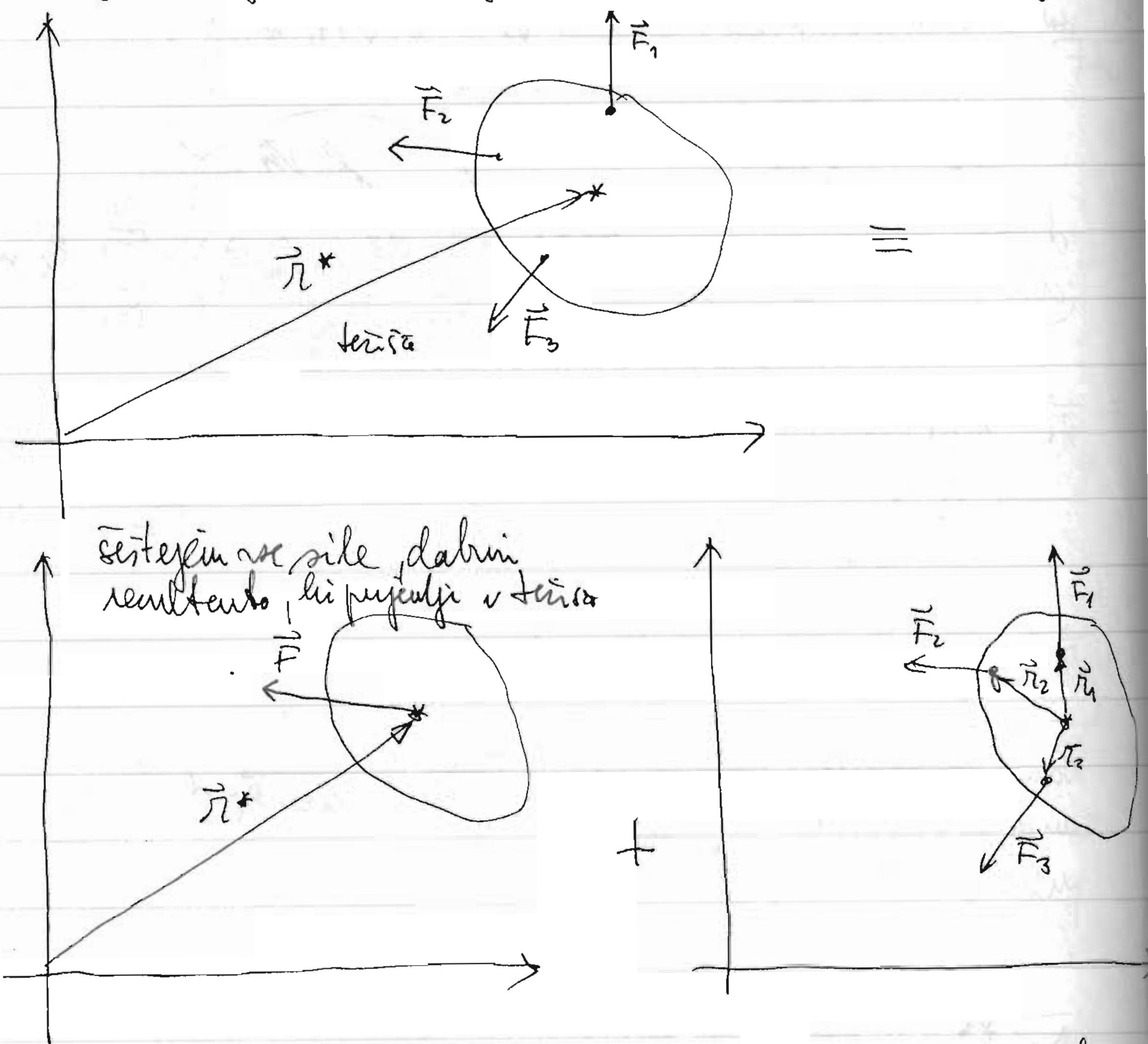
in

$$\boxed{\frac{d\vec{\Gamma}_{tež}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}^*_{iZUN}}$$

Sprem. lastne vrt. količ. glede na težišče je enaka vsoti vseh navorov zunanjih sil glede na težišče

opis gibanja
os = težiščna os

Kako si to predstavljam grafično: imam telo, na katerega delujejo zunanje sile. Kako izračunam gibanje.



ena enačba za gibanje težišča: poiščem rezultanto vseh sil, ta prijemlje v težišču in povzroča gibanje težišča. Če je $|\vec r^*|$ stalen, potem je to navor. Drugače pa to pomeni translacijo:

$$\vec F = M \cdot a^*$$

$$\frac{d}{dt}(\vec r \times \vec G) = \vec r \times \vec F$$

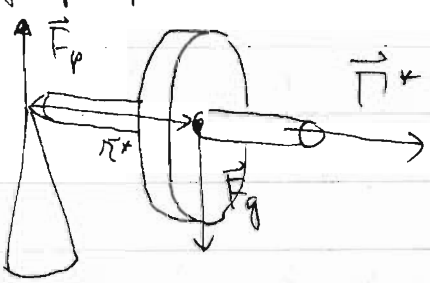
$$\underbrace{\vec v \times \vec G}_{=0} + \vec r \times \frac{d\vec G}{dt} = \vec r \times \vec F \Rightarrow \vec F = \frac{d\vec G}{dt} = m a^*$$

Poiščem vsote vseh navorov. Ti navori vrtijo telo okoli težišča.

Poseben primer: če je vsota navorov zunanjih sil glede na težišče enaka sprememba vrtilne količ. okrog

Primer: precesija vrtavke. Vrtavko z vztrajnostnim momentom J zavrtimo okoli težiščne osi s kotno hitrostjo ω. Glede na to os ima vrtilno količino
$\Gamma^* = J \cdot \omega$

Vrtavka je podprta v stalni točki, ki miruje:



Vsota vseh zunanjih sil, ki delujejo na vrtavko je enaka 0:

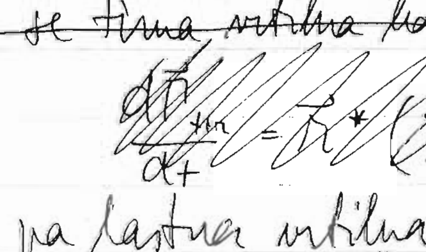
$$\sum \vec{F}_{zun} = \vec{F}_p + \vec{F}_g = 0$$

to je v redu: tirna vrtilna količina se ohranja, vendar ne vemo, katera je. Težava! To lahko izračunamo iz lastne vrt. kol. glede na težiščno os

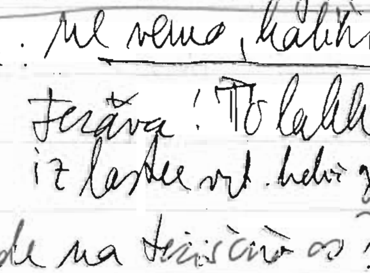
~~Torej se tirna vrtilna količina ohranja~~:

$$\cancel{\frac{d\vec{\Gamma}_{tir}}{dt} = \vec{r}^* \times \left(\sum \vec{F}_{zun}\right)}$$

Kaj pa lastna vrtilna količina glede na težiščno os? Glede na (težiščno) os deluje navor sile podlage:



od zgoraj:



lastna vrtilna količina glede na težiščno os se torej mora spremeniti v smeri navora:

To se zgodi tako, da se smer vrtilne količini (ni s tem vrtenju) rahlo spremeni:

$$\frac{d\vec{\Gamma}^*}{dt} = M^* = F_p \cdot \rho_p = \frac{\Gamma^* \cdot d\varphi}{dt} , \quad = \omega_p$$ kotna hitrost precesije

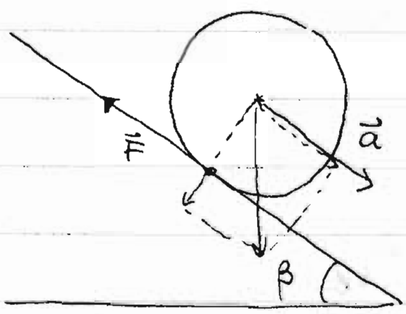
$$\boxed{\omega_p = \frac{F_p \cdot \rho_p}{J \cdot \omega}}$$

če je $\rho_p = 0$, ni precesije in vrtavka kaže vedno v isto smer.

To izkoriščamo pri inercialnih giroskopih, ki kažejo v prostoru vedno isto smer. To so hitro vrteča telesa. Uporaba: ladje, letala, rakete.

Primer: gibanje valja po klancu, če je koeficient trenja pri drsenju k_{tr} in če pri kotaljenju ni trenja.

a) Valj s polmeran R se katali po klancu



Na valj delujita dve sili: ~~sila~~ tangentna sile podlage F, ki je manjša od sile   in vzporedna komponenta sile teže. Gibanje valja obravnavamo kot vrtenje okoli težiščne osi. Za gibanje težišča velja:

$$m \cdot a^* = m \cdot g \cdot \sin\beta - F$$

Poleg tega velja enačba za navor pri vrtenju $M = J \cdot \alpha = \frac{d(J\omega)}{dt}$

$$F \cdot R = J^* \cdot \alpha$$

$$m \cdot a^* = m \cdot g \cdot \sin\beta - F$$

α, a, F so neznanke. Še ena enačba:

$v = \omega \cdot R$ in $v^* = \omega \cdot R$

$a^* = R \cdot \alpha$ $a^* = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R = \alpha \cdot R$

$J^* = \frac{1}{2} m R^2$

$$m \cdot a^* = m \cdot g \cdot \sin\beta - \frac{J^* \cdot \alpha}{R} =$$

$$= m \cdot g \cdot \sin\beta - \frac{1}{2} \frac{m \cdot R^2 \cdot a^*}{\cancel{R} \cdot \cancel{R}}$$

$$\frac{3}{2} m a^* = m \cdot g \cdot \sin\beta \Rightarrow \boxed{a^* = \frac{2}{3} g \cdot \sin\beta}$$ pospešek težišča valja.

$$F = \frac{J^* \cdot \alpha}{R} = \frac{1}{2}\frac{m \cdot R^2 \cdot a^*}{R \cdot R} = \frac{m \cdot a^*}{2} = \frac{1}{3} m \cdot g \cdot \sin\beta$$

Sila, ki vrti valj je: $F = \frac{1}{3} m \cdot g \cdot \sin\beta$

Ta sila ne sme biti večja od sile lepenja, če naj se valj kotali:

$$F = \frac{1}{3} m \cdot g \cdot \sin\beta < m \cdot g \cdot \cos\beta \cdot k_l$$

$$\boxed{\tan\beta < 3k_l.}$$

b) Če naklon β povečamo, začne valj drseti in se kotaliti. Takrat valj vrti sila trenja:

$$\left.\begin{aligned} m \cdot a^* &= m \cdot g \cdot \sin\beta - k_{tr} \cdot m \cdot g \cdot \cos\beta \\ k_{tr} \cdot m \cdot g \cdot \cos\beta \cdot R &= J^* \cdot \alpha \end{aligned}\right\}$$

Ni več povezave med a^* in α!!

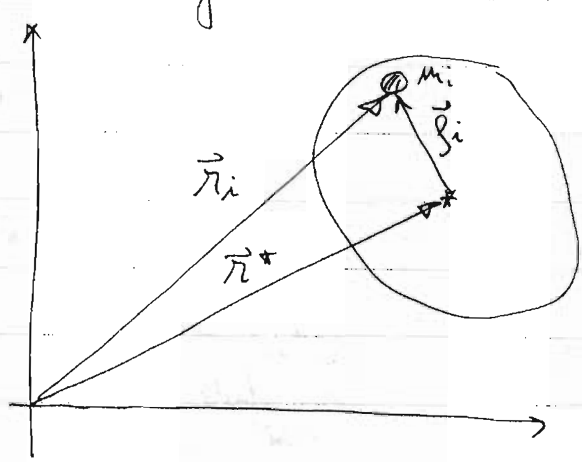
$$\boxed{\begin{aligned} a^* &= g(\sin\beta - k_{tr} \cdot \cos\beta) \\ \alpha &= \frac{2k_{tr} \cdot g \cdot \cos\beta}{R} \end{aligned}}$$

2.2.4. Kinetična energija togega telesa pri splošnem gibanju

Gibanje togega telesa lahko vedno sestavimo iz translacijskega gibanja težišča telesa in rotacije okoli težiščne osi:

splošno gibanje ≡ translacija težišča (3 koordinate) + vrtenje okoli težiščne osi (3 koordinate)

Poglejmo, kako je z s kinetično energijo, saj pri vrtenju imamo tudi kinetično energijo. Telo si mislim sestavljeno iz N delov:



$\vec{r}^*$ ... koordinata težišča

$\vec{\rho}_i$ .... koordinata i-te točke glede na težišče. Pri togem telesu je $|\vec{\rho}_i| = \text{konst.}$!!! velikost je konst.

~~Koord~~ Pozicija i-tega dela telesa z maso m_i:

$$\vec{r}_i = \vec{r}^* + \vec{\rho}_i \Rightarrow \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}^*}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}^* + \vec{v}_i'}$$

hitrost relat. glede na težišče

hitrost težišča.

Kinetična energija i-tega dela telesa je:

$$W_{ik} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}^* + \vec{v}_i{'}\right)\left(\vec{v}^* + \vec{v}_i{'}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}^{*2} + 2\vec{v}^*\vec{v}_i{'} + \vec{v}_i{'}^{2}\right)$$

Celotno kinetično energijo dobim s seštevanjem:

$$W_k = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}^{*2} + 2\vec{v}^*\vec{v}_i{'} + \vec{v}_i{'}^{2}\right)$$

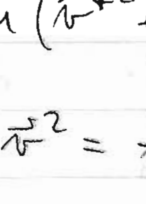
To preide v integral:

$$W_k = \frac{1}{2}\int dm \left(\vec{v}^{*2} + 2\vec{v}^*\vec{v}' + \vec{v}'^{2}\right) = \frac{1}{2}\int \overset{\text{konst}}{\vec{v}^{*2}}\, dm + \int dm\, \vec{v}^*\vec{v}' +$$

$$+ \frac{1}{2}\int dm\, \vec{v}'^{2} = \frac{1}{2}\vec{v}^{*2}\underbrace{\int dm}_{M} + \vec{v}^*\underbrace{\int dm\, \vec{v}'}_{\text{gibalna količ. glede na težišče}} + \frac{1}{2}\int dm\, \vec{v}'^{2} =$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot \vec{v}^{*2} + \frac{1}{2}\int dm \cdot \vec{v}'^{2} = \frac{1}{2} M \vec{v}^{*2} + \frac{1}{2}\overset{=0}{\omega^2}\int dm\, r^2 = \frac{1}{2} M \vec{v}^{*2} + \frac{1}{2} J$$

Kakšna je smer $\vec{v}'$-ja: opazim, da je to hitrost i-tega dela telesa glede na težišče:

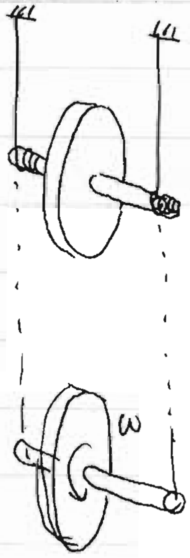


$\Rightarrow$ tangentna smer $v = \omega \cdot r$

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} M \vec{v}^{*2} + \frac{1}{2} J^* \omega^2}$$

Kinetična energija togega telesa je sestavljena iz kinetične energije gibanja težišča in rotacijske energije zaradi vrtenja okoli težiščne osi.

Primer: Maxwellovo kolo (jo-jo)



$\omega' = 0$, W_p', $v^{*\prime} = 0$ – v najvišji legi

$\omega \neq 0$, W_p, $v^* = 0$ v najnižji legi

Velja ohranitev skupne energije, s tem da je sedaj

$W_k = \frac{1}{2} M \vec{v}^{*2} + \frac{1}{2} J^* \omega^2$

v^* ... hitrost težišča
ω ... kotna hitrost

$W_k - W_k' + W_p - W_p' = 0$

$\frac{1}{2} J^* \omega^2 - 0 + 0 - m \cdot g \cdot h^* = 0$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2 m g h^*}{J^*}}}$$

2.2~~5~~4. Ravnovesne lege togega telesa

Telo je v mehanskem ravnovesju, če sta pospešek težišča in kotni pospešek ~~telesa~~ vrtenja telesa okoli težišča enaka 0. Za gibanje težišča velja 2. Newtonov zakon:

$$M \cdot \vec{a}^* = \sum_i \vec{F}_{i\,zun} \quad , \quad \vec{a}^* = 0 \Rightarrow \sum_i \vec{F}_{i\,zun} = 0 \quad ; \sum_i F_{ix} = 0 \; , \sum_i F_{iy} = 0 \; , \sum_i F_{iz} = 0$$

Vsota vseh zunanjih sil mora biti enaka 0.

Pogoj $\vec{a}^* = 0$ se nanaša samo na translacijsko gibanje telesa, nič pa ne pove o rotaciji telesa. Če hočemo, da telo miruje, potem se tudi vrtilna količina ne sme spreminjati, oziroma mora biti enaka 0.

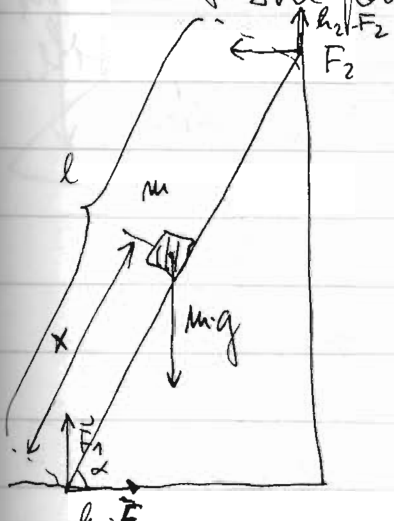
$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i\,zun} = 0$$

Pogoj za ne-vrtenje togega telesa je, da je vsota navorov vseh zunanjih sil glede na ~~poljubno~~ neko os enaka 0.

$$\sum_i \vec{M}_{i\,zun} = 0 \quad \text{ali} \quad \sum_i M_{ix} = 0 \; ; \; \sum_i M_{iy} = 0 \; \text{in} \; \sum_i M_{iz} = 0$$

Pokazati še da, da je izbor osi poljuben; katerokoli os si izberemo, je enako dobra.

Primer: Lahka lestev dolžine l je prislonjena ob navpični steni. Koeficient lepenja med podom. Tlemi in lestvijo je k_1, med lestvijo in zidom pa k_2. Po lestvi se vzpenja človek z maso m. Kako visoko se sme razpeti, da lestev ne začne drseti?



Pogoj za ravnovesje težišča:

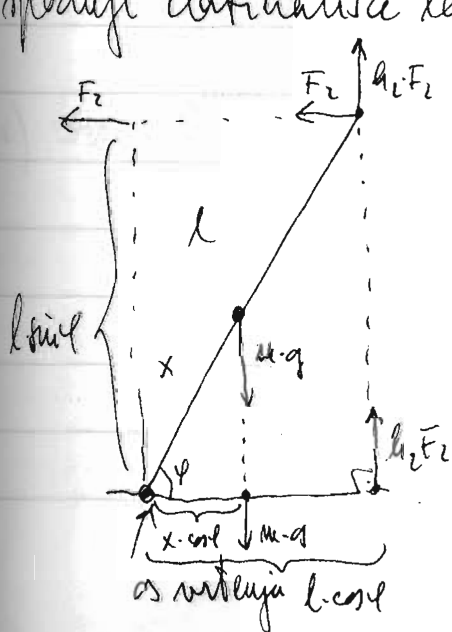
$$\left.\begin{aligned} x\text{ smer:}\quad & -F_2 + k_1 F_1 = 0 \\ y\text{ smer:}\quad & F_1 + k_2 F_2 - m\cdot g = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$F_1 = \frac{F_2}{k_1}$$

$$\frac{F_2}{k_1} + k_2 F_2 - m\cdot g = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_2 &= m\cdot g \cdot \frac{k_1}{1+k_1 k_2} \\ F_1 &= m\cdot g \,\frac{1}{1+k_1 k_2} \end{aligned}}$$

To pove nekaj o velikosti sile, nič pa ne pove o drsenju. Zahtevati moramo si ravnovesje navorov. Okoli poljubne osi. Izberemo si spodnje dotikališče lestve:



$$\sum_i M_i = 0$$

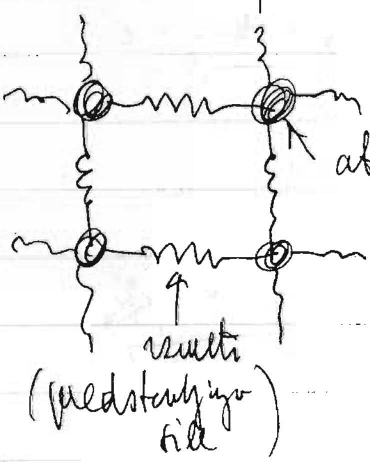
$$m\cdot g\cdot x\cdot\cos\varphi - k_2 F_2 \cdot l\cdot\cos\varphi - F_2\cdot l\cdot\sin\varphi = 0$$

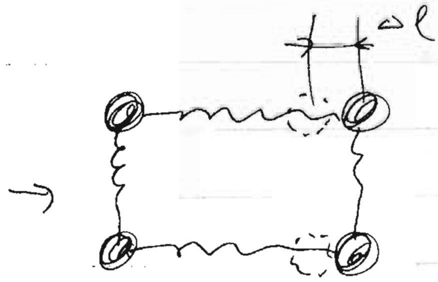
$$x = \frac{k_2 F_2 l + F_2\cdot l\cdot \mathrm{tg}\,\varphi}{m\cdot g} = \frac{F_2\cdot l\,(\mathrm{tg}\,\varphi + k_2)}{m\cdot g}$$

$$= \frac{\cancel{m\cdot g}\cdot k_1\cdot l}{1+k_1k_2}\cdot\frac{(\mathrm{tg}\,\varphi + k_2)}{\cancel{m\cdot g}} = \frac{k_1 l\,(k_2 + \mathrm{tg}\,\varphi)}{1+k_1k_2}$$

2.3. ~~2.2.6.~~ Elastične deformacije teles

V resnici telesa v naravi niso trdna in toga, temveč se pod vplivom zunanjih sil deformirajo, to je spremenijo svojo obliko. Zakaj? Vsako telo je sestavljeno iz atomov ali molekul, med katerimi delujejo privlačne in odbojne sile. Npr. kristal si lahko predstavljamo kot periodično združbo atomov, povezanih z vzmetmi:

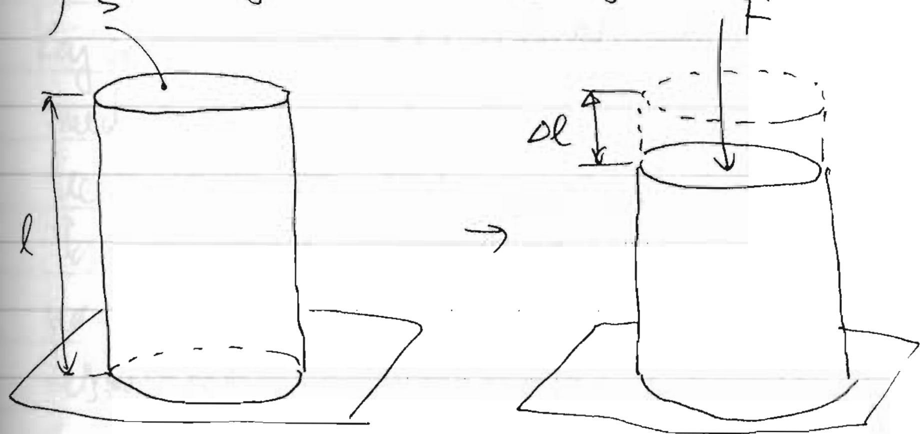




Če kristal v eni smeri raztegnemo, potem se morajo spremeniti razdalje med atomi.

Do neke določene meje je kristal elastičen. Če presežemo to mejo, pa se kristal po deformaciji ne vrne več v prvotno obliko, temveč ostane trajno deformiran.
Pri ~~trdnih~~ telesih razlikujemo tri osnovne tipe deformacije:

a) stiskanje ali raztegovanje



Cilinder stisnemo ali raztegnemo za Δl

$$\Delta l = l \cdot \frac{F}{S} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow \boxed{\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} \cdot E}$$

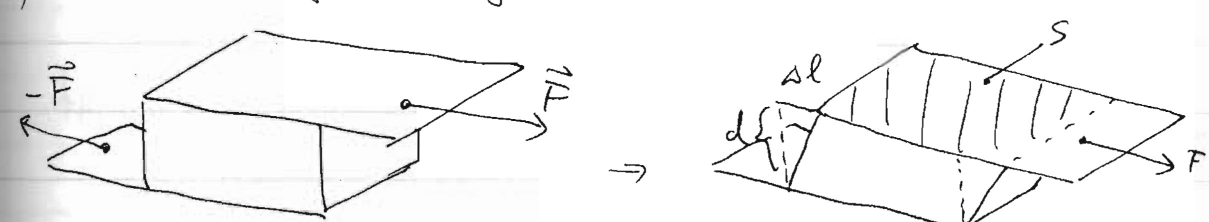
$\frac{F}{S} = p$ tlak

enota $[N/m^2] = [Pa]$

$1 bar = 10^5 N/m^2$

E .... elastični (Youngov) modul.

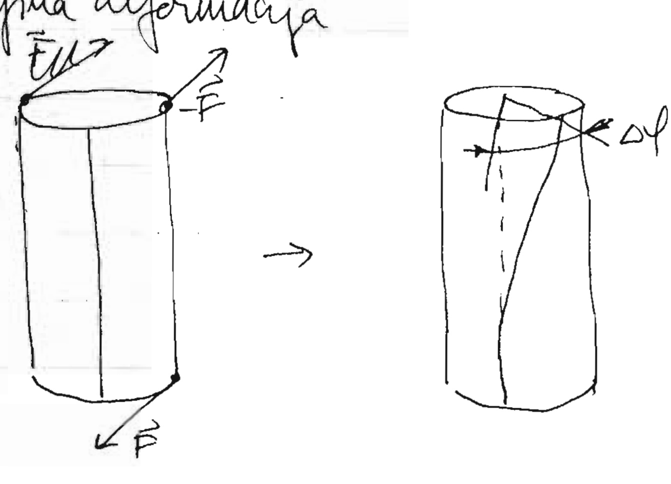
b) Strižna deformacija



$$\Delta l = d \cdot \frac{F}{S} \cdot \frac{1}{G} \Rightarrow \boxed{\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{d} \cdot G}$$

G.... strižni modul.

c) torzijska deformacija



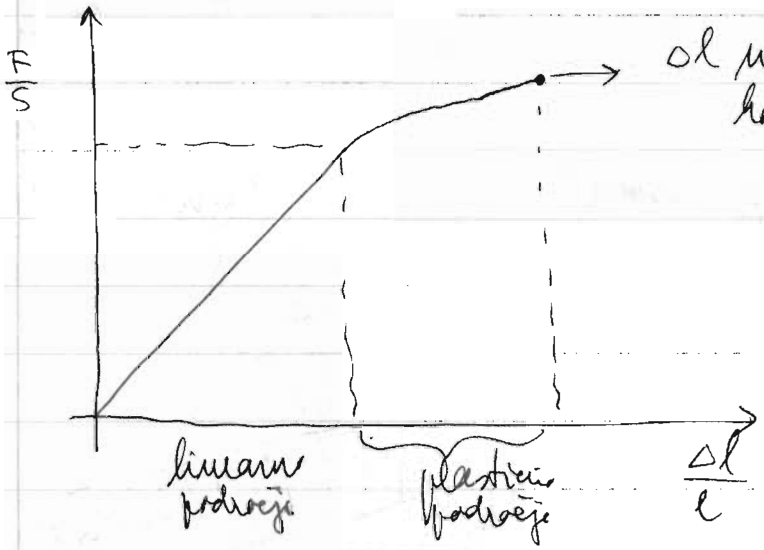
$$\Delta \varphi = \frac{M}{D}$$

$$\boxed{M = D \cdot \Delta \varphi}$$

D.... torzijski ~~modul~~ koeficient.

Elastični modul za nekatere snovi:

	E	meja trdnosti $[F/S]$
jeklo	$2\cdot 10^{11}\,N/m^2$	$4\cdot 10^{8}\,N/m^2$
steklo	$0{,}6\cdot 10^{11}\,N/m^2$	$0{,}5\cdot 10^{8}\,N/m^2$
beton	$0.3\cdot 10^{11}\,N/m^2$	$0.4\cdot 10^{8}\,N/m^2$
kost	$0.09\cdot 10^{11}\,N/m^2$	$1{,}7\cdot 10^{8}\,N/m^2$!! → kompozitni material
kavčuk	$0.08\cdot 10^{11}\,N/m^2$	$0.2\cdot 10^{8}\,N/m^2$



Δl naraste preko vsake meje, ko F/S povečamo za malo.

Primer: Kolikšno maso smemo obesiti na jekleno žico premera 1 mm? Za koliko se žica podaljša.

$\left(\frac{F}{S}\right)_{max} = 4\cdot 10^8\,N/m^2$; $S = \pi r^2 = \pi\cdot(0.5\cdot 10^{-3}\,m)^2 = 0{,}78\cdot 10^{-6}\,m^2$

$F_{max} = 0.78\cdot 10^{-6}\,m^2 \cdot 4\cdot 10^8\,N/m^2 = 3\cdot 10^2\,N \Rightarrow m = \frac{F}{g} = \underline{32\,kg}$

$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l}\cdot E \Rightarrow \left(\frac{\Delta l}{l}\right)_{max} = \left(\frac{F}{S}\right)_{max}\cdot\frac{1}{E} = \frac{4\cdot 10^8\,N/m^2}{2\cdot 10^{11}\,N/m^2} = 0.002$

žica se podaljša za 0,2%. pri 1 m je to $\underline{2\,mm}$

2.4. Mehanika tekočin

Kaj so tekočine: eno od osnovnih stanj snovi. Po svoji naravi so med plini in trdninami. Od trdnin se razlikujejo po tem, da tečejo. Tečejo zaradi tega, ker nimajo reda dolgega dosega. Posamezni atomi ali molekule v tekočini so razporejeni popolnoma brez reda. V kristalu je red. Zaradi tega tudi tekočine ne prenašajo sil, trdni kristali pa jih.
S stališča primerjave s plini so si plini in tekočine precej podobni. Oboji nimajo stalne oblike in so brez reda dolgega dosega. Tekočine se od plinov razlikujejo po tem, da tvorijo površino: mejo med sredstvom z večjo gostoto in redkim sredstvom. Tudi gostota plinov je dosti manjša.

plini: nimajo stalne oblike, brez reda dolgega dosega, nizka gostota, velika stisljivost

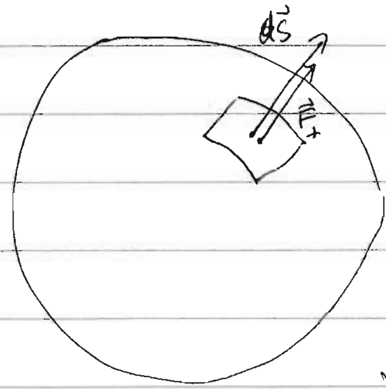
tekočine: nimajo stalne oblike, tečejo, so brez reda dolgega dosega, visoka gostota, nizka stisljivost, tvorijo površine, ne prenašajo statičnih sil

trdnine: Imajo stalno obliko, ne tečejo, so urejeni, visoka gostota, nizka stisljivost.

Med tekočino in trdnino imamo še en razred snovi: tekoči kristali. Kažejo nekatere lastnosti tekočin (tečejo), vendar tudi lastnosti kristalov.

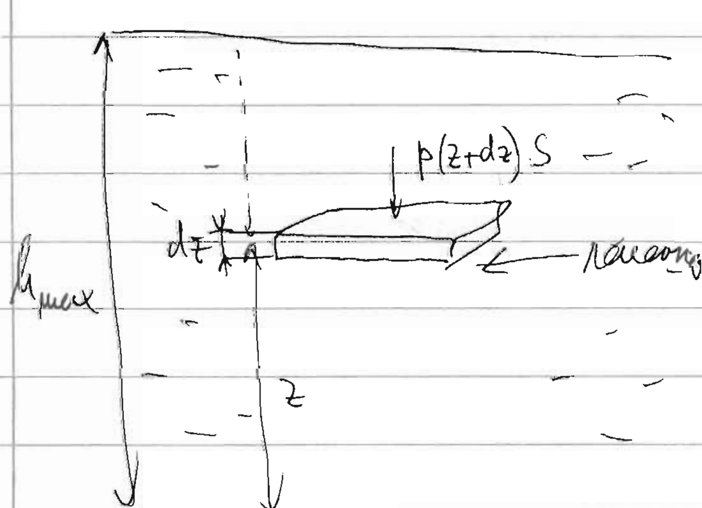
2.4.1. Hidrostatski tlak in vzgon

a) hidrostatski tlak: vzemimo tekočino v določeni posodi. V notranjosti tekočine obstaja tlak, ki ga zaznamo kot merljivo silo na kateri ploskvi. Tlak je skalarna količina, za razliko od sile, ki je vektor. Vzamemo določeno ploskev, ki obdaja določen volumen tekočine ali plina. Na dano ploskev $\vec{S}$ deluje pravokotna sila $\vec{F}_\perp$. Kvocient



$$p = \frac{|\vec{F}_\perp|}{|\vec{S}|}$$

imenujemo tlak. Važna je torej pravokotna komponenta sile na določeno ploskev. Enota za tlak je $[N/m^2] = [Pa]$, $10^5 Pa = 1 bar$. Večja enota. Poglejmo, kako je s tlakom v mirujoči tekočini. Izberem si volumski element $dV = S\,dz$, ki je na višini z: ta element miruje, torej je vsota vseh sil enaka 0.



Na zg. ploskev deluje sila

$-p(z+dz)\cdot S$

Na spodnjo ploskev mora delovati tlak in sila teže

$-dF_g = -g\,dm = -g\rho S\cdot dz$

Navzgor deluje sila tlaka na spodnji ploskvi

$$p(z)\cdot S$$

Vsota mora biti enaka 0

$$-p(z+dz)\cdot \cancel{S} - \rho g\cdot \cancel{S}\cdot dz + p(z)\cdot \cancel{S} = 0$$

$$-p(z+dz) + p(z) = \rho g\cdot dz \qquad dp = p(z+dz) - p(z)$$

$$-dp = \rho\cdot g\cdot dz$$

$$\boxed{dp = -\rho g\cdot dz}$$

če gremo navzgor za dz, se tlak zmanjša za $-\rho g dz$, dp

Krajevno odvisnost tlaka dobimo z integracijo

$$\int_{p_{max}}^{p(z)} dp = -\rho g \int_0^z dz = -\rho g\cdot z = p(z) - p_{max}$$

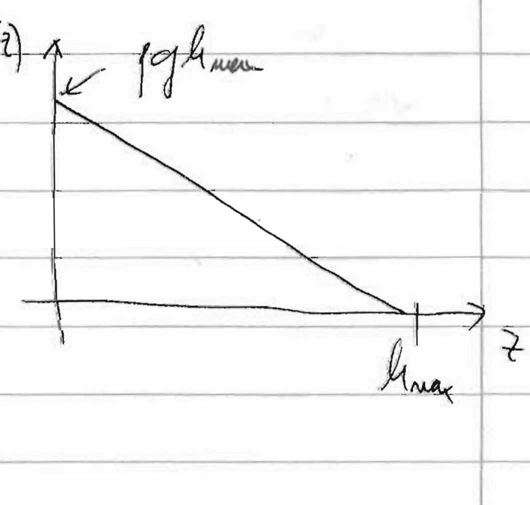
$$\boxed{p(z) = p_{max} - \rho g z}$$

Tlak linearno pada, ko se premikamo navzgor. Tlak je odvisen samo od višine tekočine

$$p(z=0) = p_{max}$$

$$p(z=h) = p_{max} - \rho g h_{max} = 0 \Rightarrow p_{max} = \rho g h_{max}$$

$$\boxed{p(z) = \cancel{p}\,\rho g h_{max} - \rho g z}$$



Primer tlaka v zemeljski atmosferi. Velja ista enačba,

$$dp = -\rho(z)\cdot g\cdot dz$$

$\rho(z)$ gostota zraka na višini z. Uporabimo plinsko enačbo

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

$$\rho = \frac{p\cdot M}{RT}$$

$$\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{\rho}{p} = \text{konst}$$

$$\rho(z) = p(z)\cdot\frac{\rho_0}{p_0}$$

Za izotermno atmosfero, T=konst. velja

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0}\cdot p(z)\cdot g\cdot dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}g\,dz$$

$$\int_{p_0}^{p(z)}\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}g\int_0^z dz = -\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g\cdot z$$

$$\ln\frac{p(z)}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g z$$

$$\boxed{p(z) = p_0\cdot e^{-\frac{\rho_0}{p_0}\cdot g z}}$$

eksponentno pojemanje tlaka z višino

$$e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} z}$$

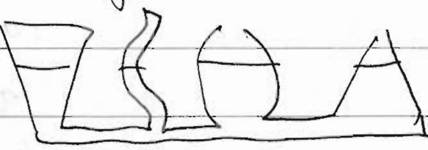
enota $\frac{1}{\text{dolžina}} = \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g}}$$

pove, na kateri razdalji se zmanjša tlak na $1/e$

to je 8,5 km za Zemljo.

Hidrostatski tlak ni odvisen od oblike posode. V veznih posodah je povsod enaka višina, kar je posledica tega.

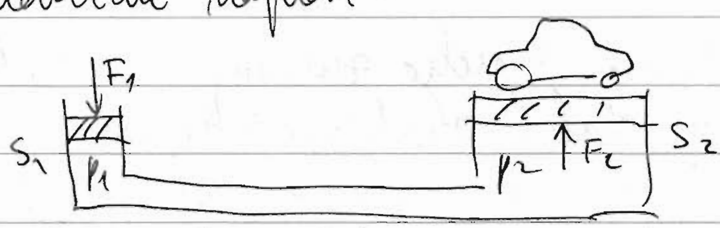


Tlak je odvisen samo od višine!

Pascalovo načelo: Tlak, ki ga ustvarimo v delu tekočine, se prenaša po celotni tekočini in na vse mejne ploskve.

Uporaba tlaka:

(a) hidravlične naprave:



Tlak je povsod v tekočini enak. Ni čisto res, saj imajo svoj lasten hidrostatski tlak tekočine.

Velja $p_1 = p_2$

$$\frac{F_1}{S_1} = p_2 = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \boxed{F_2 = F_1 \cdot \frac{S_2}{S_1}}$$

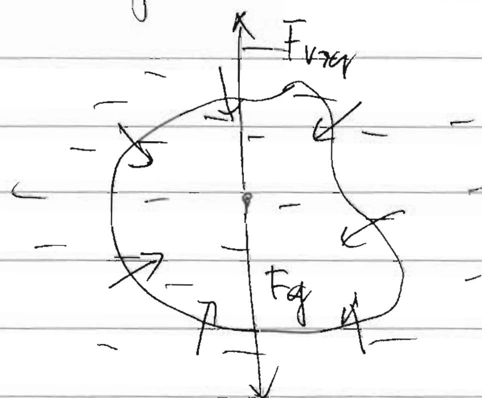
$F_2 \gg F_1$, če je $S_2 \gg S_1$

Hidravlične stiskalnice delujejo na tem principu.

(b) merjenje tlaka: barometri (na ukrivljeno cevko, na membrano itd.

Merimo silo na določeni površini.

(b) Vzgon v tekočinah: opazimo, da nekatera telesa lahko plavajo. Zakaj? Arhimedova razlaga sile vzgona. Zamislimo si mirujočo tekočino.

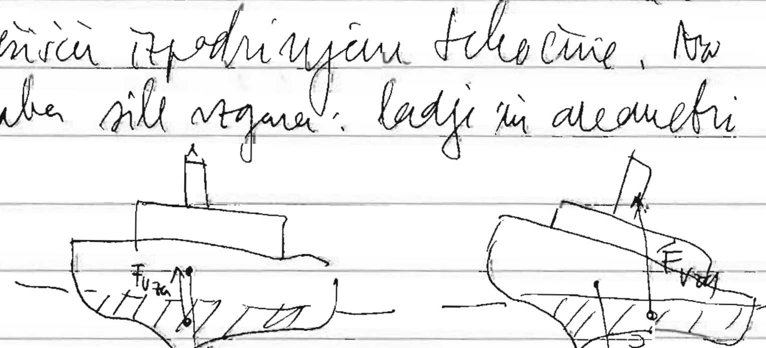


V tej tekočini ustvarimo namišljeno ploskev, ki objame del tekočine. Tekočina znotraj te ploskve miruje. Torej je sila teže te objete tekočine uravnotežena z neko enako silo. Od kod pride? Očitno od tlaka okoliške tekočine, ki deluje po vsej ploskvi. To bi sicer lahko integrirali, vendar je rezultat preprost. Okoliška tekočina deluje na objeto tekočino s tako silo vzgona, ki je nasprotno enaka sili teže objete tekočine. Prijemališče je v težišču izpodrinjene tekočine.

$$\boxed{\vec{F}_{vzg} = -\vec{F}_g}$$

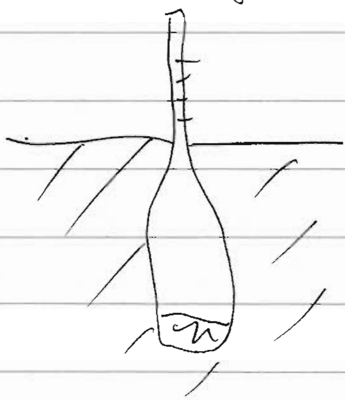
Sila vzgona je nasprotno enaka sili teže izpodrinjene tekočine in ima prijemališče v težišču izpodrinjene tekočine. Na

Uporaba sile vzgona: ladje in areometri



stabilno plavanje ladje

Areometri: z njim merimo gostoto tekočin. Ugrez areometra je odvisen od gostote izpodrinjene tekočine. Na ta način lahko merimo

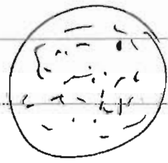


2.4.2. Površinska napetost tekočin

Tekočine se od plinov razlikujejo po tem, da imajo površine – meje med tekočino in okolico, običajno je to zrak ali podoben plin. Pri površinah tekočin opazimo zanimiv pojav, da hočejo minimizirati svojo površino.

Primeri:

a) Kaplja vode: v breztežnem stanju bi del vode dobil obliko idealne krogle (ne pa kocke ali kakšnega podolgovatega). Pri dani prostornini ima krogla najmanjšo površino. Iz tega sklepamo, da hočejo tekočine minimizirati svojo površino:



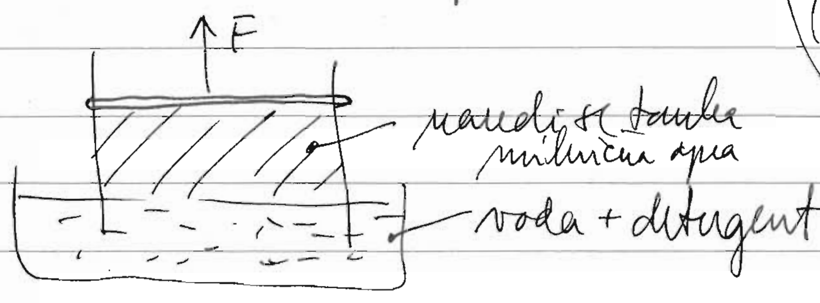
Kapljica vode

b) podoben pojav opazimo pri mokrem čopiču ali mokrih laseh: se sprimejo, ker vodna plast ki omoči posamezne kocine zmanjša svojo površino na ta način da se združi:

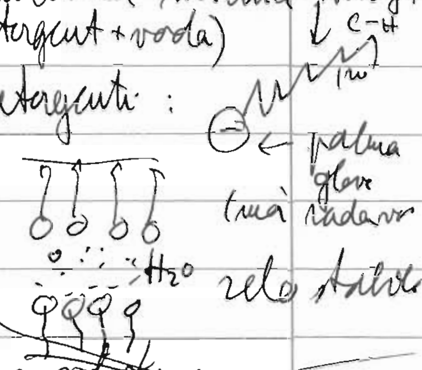
Suh čopič

Moker čopič: dlake se zlepijo.

c) milnične opne: v posodo iz milnico damo žičnat okvir s premično prečko. Ko prečko dvignemo iz milnice, se ustvari opna.

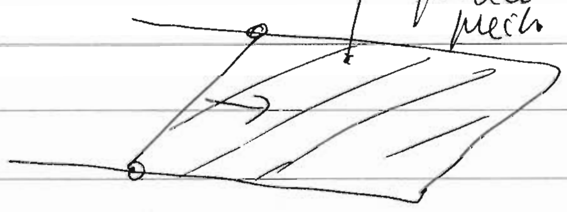


Struktura milnice (detergent + voda)
detergenti:



zelo tanke

Ugotovimo, da je F = konstanta, ni odvisna od tega, koliko dvignemo prečko. Torej ne gre za "elastično" raztegovanje, temveč je sila konstantna.



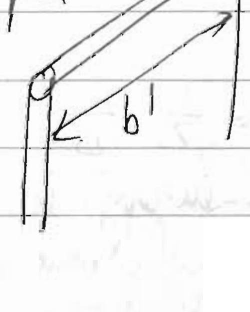
če damo okvir vodoravno, jasno vidimo, da se hoče opna skrčiti, ne mara imeti velike površine

Tu pa ugotovimo, da je sila odvisna od dolžine prečke:

$$F = \gamma \cdot b$$

γ … površinska napetost
[N/m] tudi [din/cm] = [10^{-5} N / 10^{-2} m] = [10^{-3} N/m]

b … dolžina meje (roba) milnične opne



$$b = 2b'$$

ker sta dve površini!!

Površinsko napetost lahko interpretiramo tudi drugače. Prečko premaknemo z dx. Opravili smo delo

$$dA = F\cdot dx = \gamma \cdot \underbrace{b\cdot dx}_{dS} = \gamma \cdot dS$$

$$\boxed{\gamma = \frac{dA}{dS}}$$ ← delo, ki ga moramo vložiti pri povečanju površine za dS

Vpeljemo še površinsko energijo: ~~$W_p - W_p' = A + Q$~~ =

Generalizirana TD sila, posledica mej (omejenosti sistema)

$F = -\frac{\partial W_n}{\partial x}$ ali

$F = -\frac{\partial G}{\partial x}$ → Gibbsova prosta energija $G = W_n - T\cdot S$

$$dW_s = dA + dQ = \gamma \cdot dS + dQ$$

↓ delo, ki ga dov.

↓ toplota, ki jo prejme plin

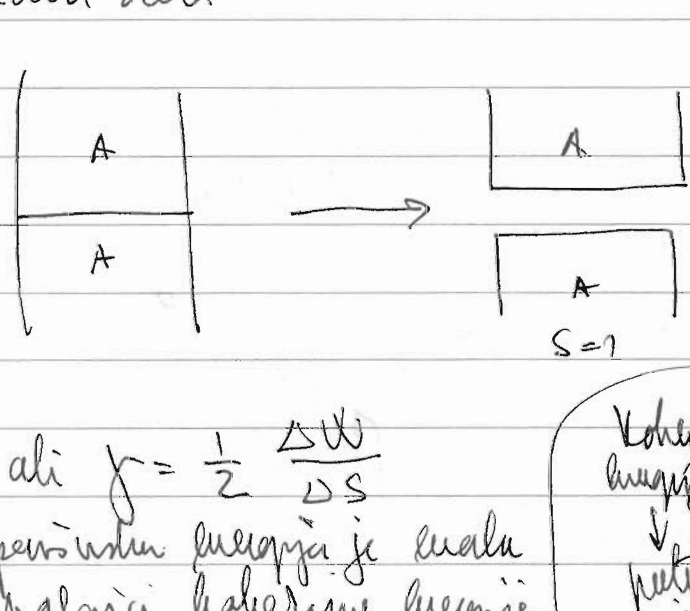
Posledica:

a) sistem teži k čim manjši energiji oz. max-entropiji. Drugače: pojavijo se sile, ki da silijo v ravnovesje

b) pojavijo se stene - energija je površinske.

c) naloga določanja z mirno energijo

Od kod izvira površinska energija? Atomi in molekule, ki so na meji sredstva, imajo različne energije (vezavne potenciala), kot v notranjem prostoru pri sosedov. Torej si površinsko energijo razložimo z razdelitvijo snovi na dva dela



naredimo dve površini. Za to porabimo energijo na kvadrat ploskve

Kohezijska energija $\frac{\Delta W}{\Delta S} = 2\cdot\gamma$

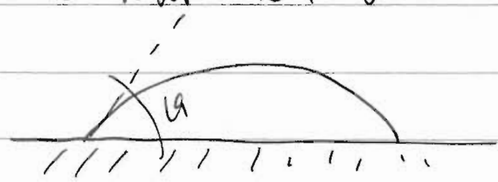
↓ potrebno je dovesti, da razdružimo snov

ali $\gamma = \frac{1}{2}\frac{\Delta W}{\Delta S}$

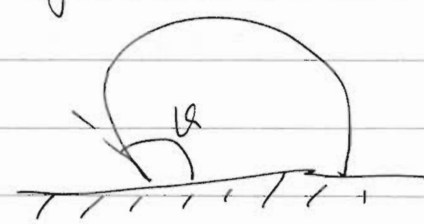
površinska energija je enaka polovici kohezijske energije sredstva.

Površinska napetost je tesno povezana s tem, kakšne oblike imajo kapljice na površini določenega substrata. Nekatere podlage omoči, druge ne

Kontaktni kot: ϑ

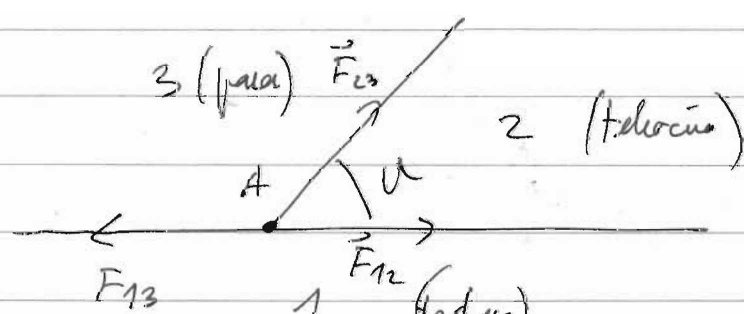


voda omoči površino (kontaktni kot ϑ je majhen)



voda ne omoči površine (kontaktni kot je velik)

Kako je kontaktni kot povezan s površinskimi napetostmi? Vzemimo mejo med 3 sredstvi:



Na črto vzdolž A delujejo 3 površinske napetosti:

γ_{13} ... površinska napetost trdno – para (zrak)
γ_{12} ... površinska napetost trdno – tekočina
γ_{23} ... površinska napetost tekočina – para (zrak)

Velja ravnovesje sil: $F_{13} = F_{12} + F_{23} \cdot \cos\vartheta$

$$\boxed{\cos\vartheta = \frac{F_{13} - F_{12}}{F_{23}}} = \boxed{\frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}}{\gamma_{23}}}$$

Youngova enačba

Omočitveni kot je majhen $\vartheta < \pi/2 \Rightarrow \gamma_{13} > \gamma_{12}$

energija meje med 1 in 3 je visoka, zato se raje poveča stična površina 1–2. Kapljevina omoči površino.

Omočitveni kot je velik: $\vartheta > \pi/2 \Rightarrow \gamma_{13} < \gamma_{12}$

Energija meje med 1 in 3 je manjša, zato se tekočina noče razširiti.

Površinske energije so zelo pomembne v industriji emulzij, drugje ipd.

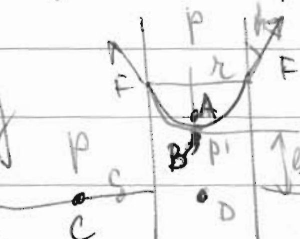
$p' \rightarrow$ tlak v B (v tekočini) je manjši kot v A

tlak zaradi ukrivlj. pov.

Posledica površinske napetosti: $p_A - p_B = p - p' = 2\gamma \cdot \frac{\cos\vartheta}{r}$

$p' = p - \rho g h$ A je nižji kot D

a) Kapilarni dvig

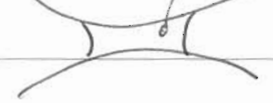


$p' = p - 2\gamma\frac{\cos\vartheta}{r} = p - \rho g h$

$\rho g h = 2\gamma \cdot \frac{\cos\vartheta}{r} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2\gamma\cos\vartheta}{\rho g \cdot r}}$

Tlak v A, C in D je enak.

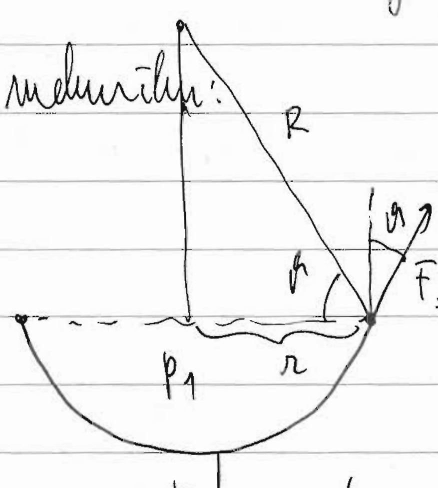
b) Kapilarna kondenzacija:



Kondenzirana voda v tankih plasteh

$h \sim \frac{1}{r}$ kapilarni dvig (stene!)

c) Tlak v mehurčku:



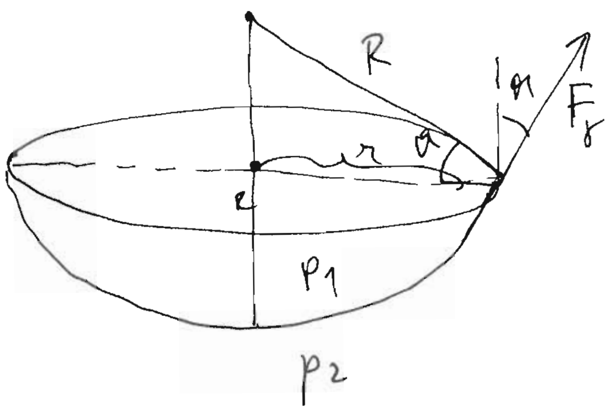
$r = R \cdot \cos\vartheta$

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{4\gamma}{R}}$$

$F = (p_1 - p_2)\cdot \pi r^2 = F_s \cdot \cos\vartheta = 2\pi r \cdot \gamma \cdot \cos\vartheta$

Laplaceov tlak zaradi ukrivljenosti površine tekočine $\Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{2\gamma \cdot \cos\vartheta}{r} = \frac{2\gamma}{R} \rightarrow \frac{4\gamma}{R}$ (dve površini)

Laplace-ov tlak zaradi ukrivljene meje



$p_1 > p_2$ in sila na mejo je

$$F = (p_1 - p_2) \cdot \pi r^2$$

Ta sila je nasprotna (nasprotno enaka) sila, ki prijemlje po obodu $2\pi r$

$$F = F_\gamma \cdot \cos\vartheta = 2\pi r \cdot \gamma \cdot \cos\vartheta$$

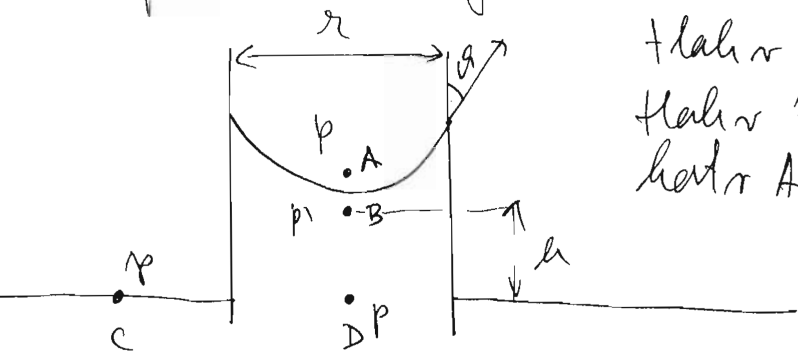
$$(p_1 - p_2)\, \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} = 2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot \gamma \cdot \cos\vartheta$$

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{r} \cdot \cos\vartheta = \frac{2\gamma}{R}$$

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{2\gamma}{R}}$$

Laplace-ov tlak zaradi ukrivljene meje.

Kapilarni dvig tekočine



Tlak v C, D in A je enak, p. Tlak v B je ~~B~~ p'. Ta tlak je nižji kot v A. Zaradi tega leži B za h višji od D

$$p' = p - \rho \cdot g \cdot h$$

Po drugi strani je zaradi ukrivljenosti meje zrak/tekočina tlak v A (p) večji od tlaka v B (p')

$$p_A - p_B = p - p' = 2\gamma \cdot \frac{\cos\vartheta}{r}$$

$$p' = p - \rho \cdot g \cdot h \Rightarrow p - p' = \rho \cdot g \cdot h$$

$$\rho \cdot g \cdot h = 2\gamma \cdot \frac{\cos\vartheta}{r} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2\gamma \cdot \cos\vartheta}{\rho \cdot g \cdot r}}$$

a) če omoči, se močno dvigne gladina.

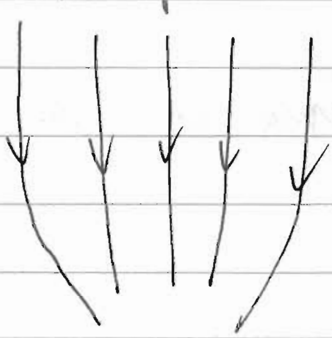
b) majhne kapilare ($r \ll$) → velik dvig.

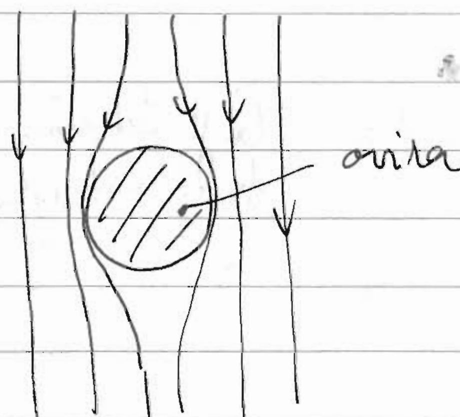
(4 vaje iz kalkulija za leto 1994)

2.4.3. Bernoullijeva enačba

Bernoullijeva enačba obravnava tok tekočin. Grafično si ga predstavimo s tokovnicami, ki opisujejo tire posameznih delcev tekočine v gibanju. Glede na obliko tokovnic, poznamo dve vrsti tokov:

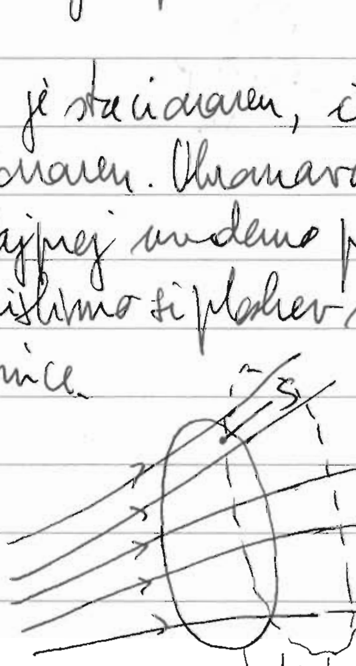
a) laminarni tok: tokovnice so med seboj lepo razporejene (kot počesani lasje)





b) turbulentni (vrtinčast) tok. Tekočina se vrti, ne pa samo za translatorno gibanje. Takšno obliko toka srečamo običajno pri velikih hitrostih toka.

Tok tekočine je stacionaren, če se ne spreminja s časom. Drugače pa je nestacionaren. Obravnavali bomo laminarni tok tekočine. Najprej uvedemo pojem masnega in volumskega toka. Zamislimo si ploskev s presekom S, skozi katero gredo tokovnice.



v času dt se tokovnice premak. za dx

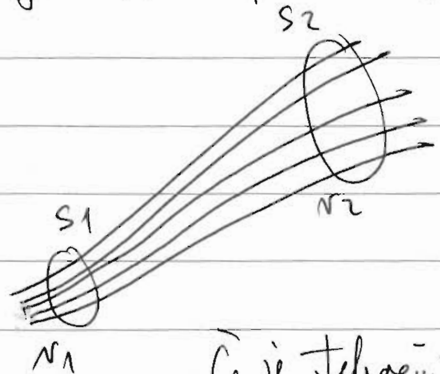
$$dx = v \cdot dt$$

$$dm = \rho \cdot S \cdot dx = \rho \cdot v \cdot S \cdot dt$$

Masni tok skozi določeno ploskev je torej

$$\phi_m = \frac{dm}{dt} = \rho \cdot v S$$

Masni tok je konstanten, nič mase se ne pridela in nič izgubi.



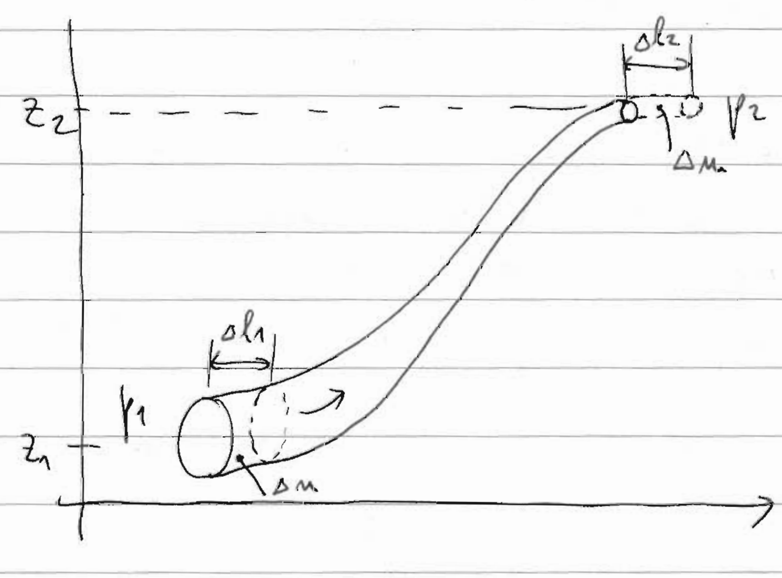
$$\phi_{m1} = \phi_{m2}$$

$$\rho_1 \cdot v_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot v_2 S_2$$

Če je tekočina nestisljiva, se ohranjajo tudi volumski tokovi:

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \boxed{v_1 S_1 = v_2 S_2}$$

Obravnavajmo sedaj laminarni tok nestisljive tekočine, kjer ni viskoznega trenja med posameznimi deli tekočine.

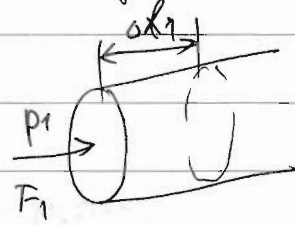


Za tak tekočine velja energijski zakon (ni trenja):

$$W_k - W_k' + W_p - W_p' = A_{zun}$$

$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m \cdot g z_2 - \Delta m \cdot g \cdot z_1 = \Delta A$$

Delo zunanjih sil: $\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2$



$\Delta A_1 = F_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot \Delta l_1 = p_1 \cdot \Delta V_1$ delo vložimo

$\Delta A_2 = - p_2 \cdot \Delta V_2$ delo dobimo

$\Delta A = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$; vstavimo v energijsko enačbo in dobimo.

$$\frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g z_2 - \Delta m g z_1 = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

Če je tekočina nestisljiva, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$; delimo z ΔV

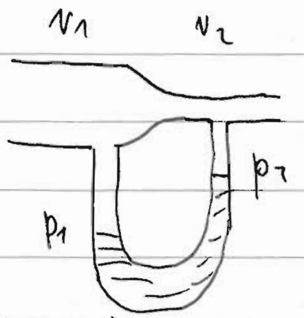
$$\frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta V} v_1^2 + \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_2 - \frac{\Delta m}{\Delta V} g z_1 = p_1 - p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 + p_1$$

Ali : $\boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konstanta.}}$ Bernoullijeva enačba.

Uporaba:

(a) Venturijeva cev

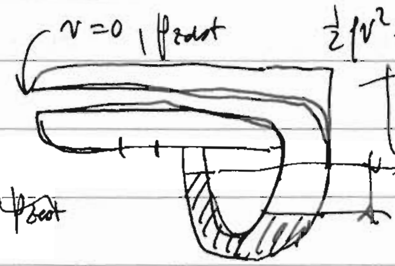


$v_2 > v_1$

$p_2 < p_1$

Merimo hitrost.

(a') Prandtlova (Pitotova) cev:

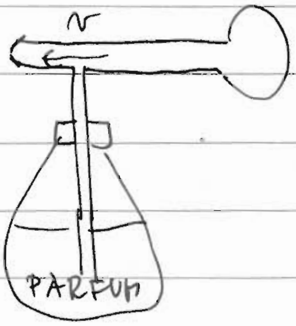


$\frac{1}{2}\rho v^2 + 0 = 0 + p_{zast}$

$\boxed{p_{zast} = \frac{1}{2}\rho v^2}$

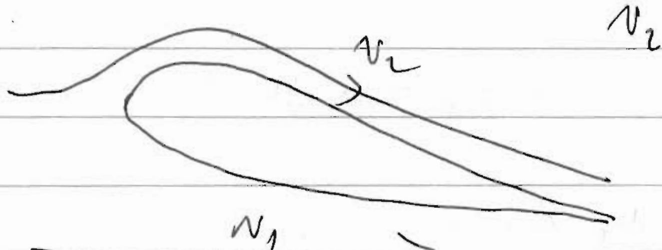
$\frac{1}{2}\rho v^2 = p_{zast}$

(b) ustvarjanje podtlaka:



zaradi velike hitrosti plina je v horizontalni cevki zelo majhen tlak. Na tem principu deluje vodna vakuumska črpalka.

(c) letalsko krilo



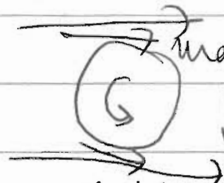
$v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

nastane podtlak, ki dviguje krilo

(d) vihar odkriva strehe:

$v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1$

(e) Magnusov efekt (Maradona)



mala hitrost zraka $\Rightarrow p$ ve

F_{magnus}

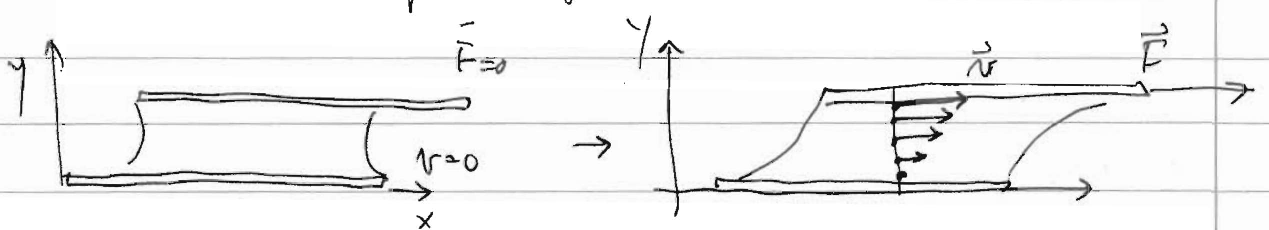
velika hitrost zraka $\Rightarrow p$ ma

2.4.4. Viskoznost in upor v tekočinah

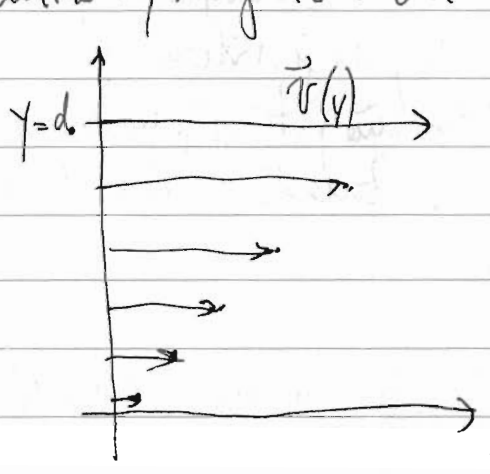
Tekočine ne prenašajo statičnih sil, prenašajo pa sile zaradi gibanja tekočine. V tem kratkem pregledu bomo obravnavali
- strižne sile in viskoznost tekočin
- sile upora zaradi gibanja teles v tekočinah

a) viskoznost in strižne sile ("shear" force)

Naredimo poskus, v katerem damo viskozno (med) tekočino med dve plošči. Spodnja je pritrjena, zgornjo pa vlečemo z določeno silo. Ugotovimo, da pri konstantni sili zgornja plošča doseže po določenem času konstantno hitrost premikanja.



Tok tekočine je laminaren. Tekočina ob steni miruje (se lepi). Profil hitrosti, ki ga izmerimo v laboratorijskem (mirujočem) sistemu je



hitrostni profil. Hitrost linearno narašča z odd. od spodnje plošče in doseže hitrost zgornje plošče na zgornji plošči.

Ugotovimo si, da je sila, ki je potrebna za doseganje hitrosti v sorazmerna s površino plošč S in obratnosorazmerna z razdaljo d.

$$F = S \cdot \frac{v}{d} \cdot \eta \qquad \eta \ldots \text{eta, viskoznost tekočin}$$

ali bolj pogosto zapišemo: $\frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{v}{d}$

Vidimo, da ima viskoznost η podobno vlogo kot elastični modul E v elastomehaniki. Razlika je v tem, da imamo pri tekočinah gradient strižne hitrosti $\frac{v}{d} = \frac{\Delta v}{\Delta y}$, ne pa statične deformacije $\frac{\Delta l}{l_0}$. Enota za viskoznost tekočin je $[N \cdot s/m^2] = [Pa \cdot s]$. Pogosto imamo enoto poise, ki je iz cgs sistema $1\ \text{poise} = 1\ dyn \cdot s/cm^2 = 10^{-5} N \cdot s/10^{-4} m^2 = 0{,}1\ Ns/m^2$

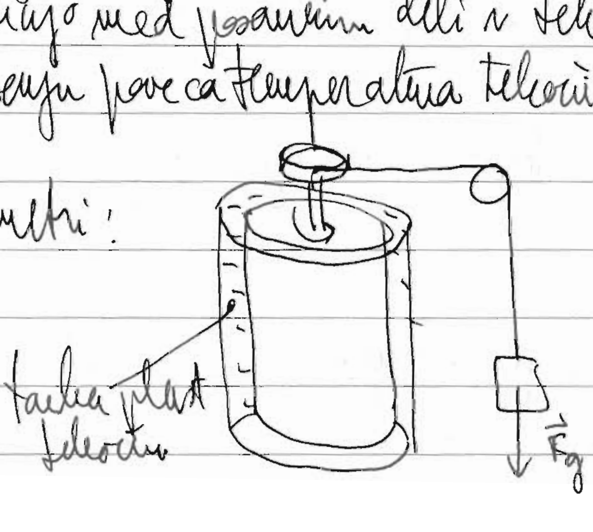
$$\boxed{1\ \text{poise} = 0.1\ Pa \cdot s}$$

Viskoznosti kapljevin:

snov	η [Ns/m^2]
voda (20°)	1×10^{-3}
voda (90°)	$0{,}3 \times 10^{-3}$
glicerin (20°)	1,5
zrak (20°)	$1{,}8 \times 10^{-5}$

Poudariti velja, da je viskoznost tekočin podobna pojavu, kot je trenje pri trdnih telesih. Pravimo tudi, da je viskoznost notranje trenje med posameznimi delci tekočine, torej je povezana z interakcijo med posameznimi deli v tekočini. Zaradi viskoznosti se pri gibanju poveča temperatura tekočine.

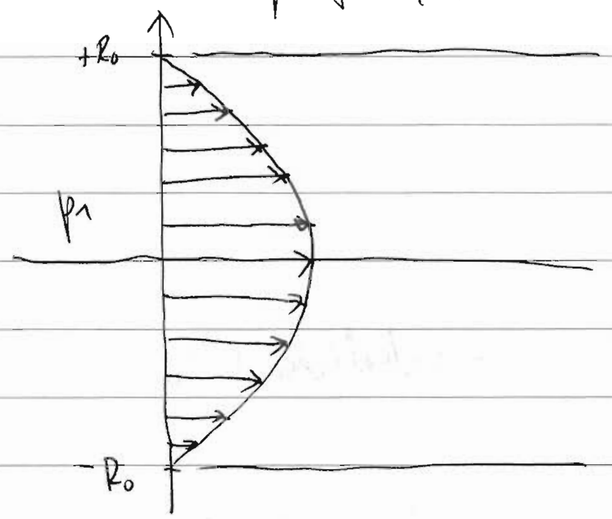
Viskozimetri:



Ko utež spustimo, zaradi strižnih sil valj doseže končno hitrost vrtenja. To je merilo za viskoznost tekočine.

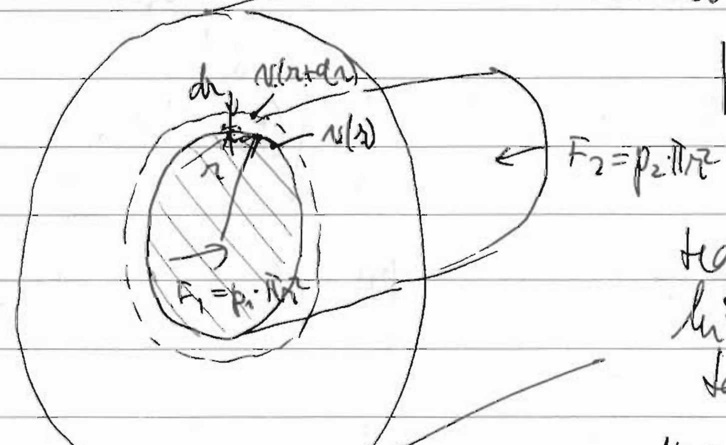
Primer: : tok tekočine po cevi s polmerom R_0. Na eni strani je pritisk p_1, na drugi p_2. Kakšen je masni pretok odvisen od razlike pritiskov?

Kakšen bo hitrostni profil $v(r)$



$v(r)$: hitrost tekočine bo največja na sredini, ob $\pm R_0$ pa bo enaka 0. Problema se lotimo tako, da valj razdelimo na koncentrične lupine. Zamislimo si valj iz tekočine, ki ima polmer r. Na ta valj tekočine deluje razlika sil

$$p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = (p_1 - p_2)\pi r^2$$



Hitrost gibanja plašča tega valja je $v(r)$. Ta hitrost je odvisna od sile na ta plašč in strižne sile med valjem in okolišnjo tekočino

$$\frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{\overbrace{v(r+dr) - v(r)}^{dv}}{dr} = \eta \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{(p_1 - p_2)\pi r^2}{2\pi r \cdot L}$$

$$F = 2\cancel{\pi}\cancel{r}\cdot L\cdot\eta\left(-\frac{dv}{dr}\right) = (p_1-p_2)\cancel{\pi}r^{\cancel{2}}$$

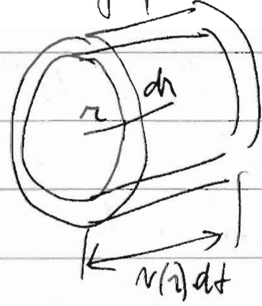
$$-\frac{dv}{dr} = \frac{(p_1-p_2)\cdot r}{2\eta\cdot L}$$

$$-dv = \frac{(p_1-p_2)}{2\eta L}\cdot r\,dr$$

$$-\int_v^0 dv = \frac{p_1-p_2}{2\eta L}\int_r^{R_0} r\,dr = \frac{p_1-p_2}{4\eta L}r^2\Big|_r^{R_0} = \frac{p_1-p_2}{4\eta L}\left(R_0^2-r^2\right) = v$$

$$\boxed{v(r) = \frac{p_1-p_2}{4\eta L}\left(R_0^2-r^2\right)}$$ Parabolični hitrostni profil.

Kolikšen je pretok? Hitrost se spreminja po r-u, zato moram integri



$$dm = \rho\cdot dV = \rho\cdot 2\pi r\,dr\cdot v\,dt$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho\cdot 2\pi r\,v\,dr = \Delta\phi_m$$

$$\phi_m = \sum\Delta\phi_m = \int_0^{R_0}\Delta\phi_m = \int_0^{R_0}\rho\cdot 2\pi r\cdot v\cdot dr =$$

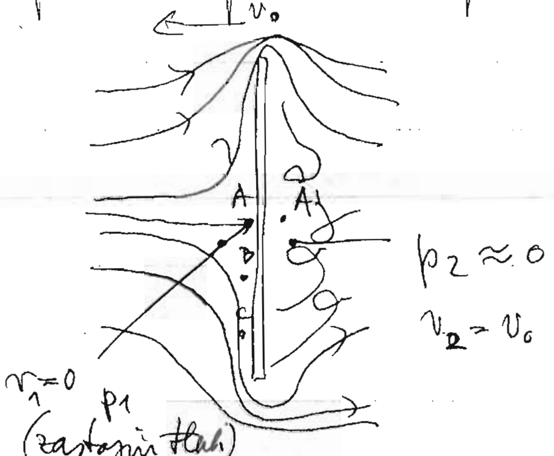
$$= \rho\cdot 2\pi\int_0^{R_0}\frac{p_1-p_2}{4\eta L}\left(R_0^2-r^2\right)\cdot r\,dr = \frac{2\pi\rho(p_1-p_2)}{4\eta L}\int_0^{R_0}\left(R_0^2-r^2\right)\cancel{dr}\,r\,dr$$

$$= \frac{2\pi\rho(p_1-p_2)}{4\eta L}\left(R_0^2\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{R_0} = \frac{2\pi\rho(p_1-p_2)}{2\cdot 4\eta L}\left(\frac{1}{2}R_0^4-\frac{1}{4}R_0^4\right) =$$

$$\frac{R_0^4}{4}$$

$$= \frac{\pi\rho(p_1-p_2)}{8\eta L}\cdot R_0^4$$ Pretok je zelo odvisen od premera cevi!!

b) linearni in kvadratni zakon upora.
Pri gibanju teles v tekočinah se pojavi upor, ki je posledica "izrivanja" tekočine pri gibanju telesa. Upor in silo upora obravnavamo samo kvalitativno, ker je natančna obravnava zelo komplicirana. Potisnimo ploščo s presekom S prečno v toku tekočine



Razlika tlakov kvalitativno pojasnimo z Bernoullijevo enačbo

p_1 ... zastojni tlak

Na prednji strani plošče je v točki A hitrost enaka 0, v točkah B in C pa je različna od nič. V točki A' je hitrost zaradi vrtincev večja. Tlak v točki A je največji, v točki A' pa najmanjši, zato deluje sila upora na ploščo

$$\underbrace{(p_A - p_{A'})\Delta S}_{F} \approx \frac{1}{2}\rho v_0^2 S$$

$$p_A + \frac{1}{2}\rho \underbrace{v_A^2}_{0} = p_{A'} + \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2$$

$$(p_A - p_{A'}) = \frac{1}{2}\rho v_{A'}^2$$

$$F_A \approx \frac{1}{2}\rho v_0^2 S$$

Ker se ta sila spreminja po prednji površini, uvedemo koeficient upora c_u:

$$\boxed{F = \frac{1}{2} c_u \rho v^2 S}$$

F ... sila upora
S ... presek telesa
v ... hitrost telesa

Kvadratni zakon upora

ploščica : $C_u = 1{,}1$
krogla : $C_u = 0{,}4$
polkrogla : $C_u = 0{,}4 / 1.3$ ⊐◻ ali D
hidrod. telo : $C_u = 0.04$

C_u.... koeficient upora, ki ga izmerimo.

Po zakonu o viskoznosti vemo, da strižne sile vplivajo na gibanje teles v tekočini. Pričakujemo, da bo sila upora sodrimoa tudi zaradi strižnih sil. To naredimo tako, da za določeno telo seštejemo strižne sile zaradi gibanja telesa v tekočini. Za kroglo s polmerom R je rezultat

$$\boxed{F_{upr} = 6\pi R \eta \cdot v}$$

Stokesov zakon upora za kroglico v tekočini z visk. η

za druga telesa

$$F = \text{koefic.} \cdot l \cdot \eta \cdot v$$

l ... značilna dimenzija telesa.

Pričakujemo, da pri majhnih hitrostih teles prevladuje linearni zakon, pri velikih pa kvadratni zakon.
Merilo je Reynoldsovo število:

$$\boxed{R_e = \frac{2R \cdot \rho \cdot v}{\eta}}$$

Sila upora za kroglo)

$$F = 6\pi R \eta v + \underbrace{0.4}_{c_u} \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot \pi R^2 +$$

$v \ll \Rightarrow$ linearni člen

$v \gg \Rightarrow$ kvadratni člen

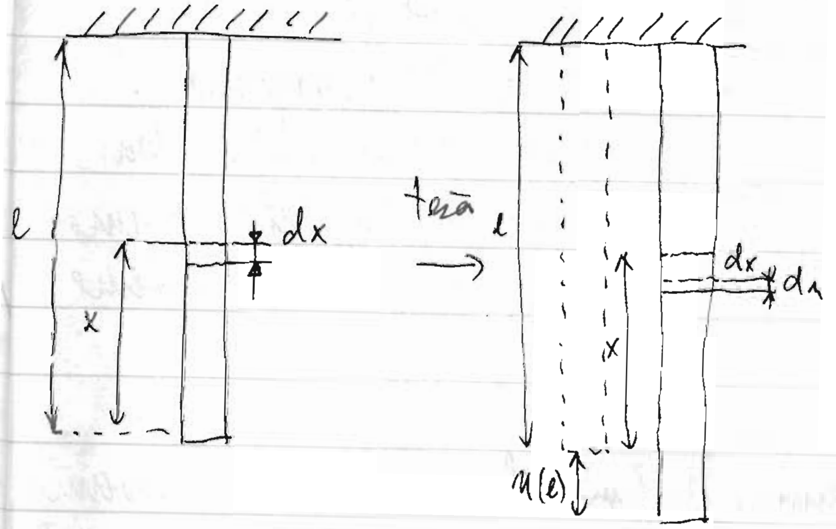
$Re < 0{,}5$ .... velja linearni zakon
$Re > 10^3$ .... velja kvadratni zakon.

Strižna sila in upor pri krogli:

$$F_{krogla} = S \cdot \frac{v}{d} \cdot \eta \approx \qquad S = 4\pi R^2$$

$$\approx 4\pi R^2 \cdot \frac{v}{R} \cdot \eta = 4\pi \eta v$$

Primer: Izračunaj za koliko se podaljša viseča palica zaradi lastne teže:



Majhen delček palice, v razdalji x od spodnjega konca se podaljša od:

$$dx \rightarrow dx + \underbrace{du}_{\text{podaljšek majhnega delčka}}$$

Delček palice se podaljša zaradi sile teže spodnjega dela palice. Ta del sile teže je:

$$F_g(x) = \int_0^x \cancel{\rho\, m(x)\, g}\; g\, dm = \int_0^x g \cdot \rho \cdot dV = \int_0^x \rho \cdot g \cdot S \cdot dx =$$

$$= \rho \cdot g \cdot S \cdot x \Rightarrow F_g(x) = \rho \cdot g \cdot S \cdot x$$

Najmanj se raztegnejo deli palice na spodnjem koncu, največ pa na zgornjem koncu. Za vsak delček dx velja

$$\underset{\text{raztezek}}{du} = \underset{\text{nerazt. dolžina}}{dx} \cdot \frac{F_g(x)}{S} \cdot \frac{1}{E} = \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot x \cdot dx}{S \cdot E} = \frac{\rho \cdot g}{E} \cdot x\, dx$$

Celoten raztezek dobimo s seštevanjem vseh raztezkov:

$$u(l) = \int_0^{u(l)} du = \int_0^l \frac{\rho \cdot g}{E} \cdot x\, dx = \frac{\rho g}{E} \cdot \frac{l^2}{2} = \frac{\overbrace{\rho \cdot l \cdot S}^{m}}{S E} \cdot \frac{g \cdot l}{2} =$$

$$= \frac{m \cdot g \cdot l}{2 S E}$$

3. TOPLOTA

V tem poglavju bomo obravnavali sisteme, ki jih sestavlja zelo veliko število delcev. To je naprimer plin, v vsakem litru plina je pri 0°C in tlaku 1 bar $3 \cdot 10^{22}$ molekul. Zastavlja se vprašanje, kaj lahko povemo in kako lahko sploh obravnavamo tako velike sisteme delcev.

Sisteme s tako velikim številom delcev lahko obravnavamo na dva načina:

1. <u>Mikroskopska obravnava</u>: obravnavamo gibanje posameznih delcev v sistemu (hitrosti, energije ipd). Ker je delcev zelo veliko, vedno lahko računamo <u>povprečne vrednosti mikroskopskih količin</u>, kot je naprimer povprečna hitrost, povprečni kvadrat hitrosti molekul in podobno. Veda, ki na tak mikroskopski način obravnava ~~se~~ sisteme z velikim številom delcev je <u>statistična mehanika</u>. Mi si bomo statistično mehaniko pogledali na koncu tega poglavja in sicer na primeru idealnega plina.

2. <u>Makroskopska obravnava</u>: sistem velikega števila delcev poskušamo opisati z makroskopskimi količinami kot so tlak v sistemu (p), prostornina sistema (V) ~~in~~ njegova temperatura (T), notranja energija (W_n) in podobno.

Te makroskopske količine imenujemo termodinamske spremenljivke (p, V, T), veda pa je <u>Termodinamika</u>

Obravnavali bomo <u>enofazne sisteme</u> (ali sama kemijska sestava – vsi delci v sistemu so enaki). Masa sistema (oziroma število delcev v sistemu) je vnaprej dana in se ne spreminja.

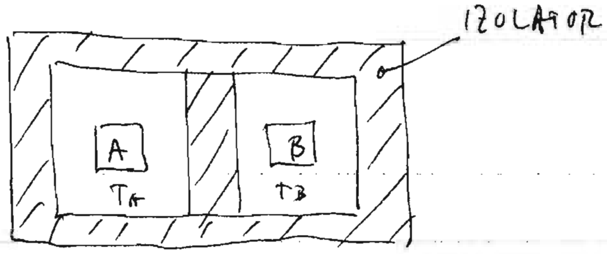
Pri makroskopskem opisu bomo uporabljali nove pojme:

1. stanje sistema: stanje sistema delcev ~~da~~ je ~~dolo~~ določeno z točno znanimi vrednostmi termodinamskih spremenljivk: p, V, T.
2. ravnovesno stanje: ~~sa~~ termodinamske spremenljivke se s časom ne spreminjajo.
3. toplotno izoliran sistem: ne more izmenjavati energije z okolico
4. sistem v toplotnem stiku z drugim sistem: zelo lahko izmenjuje energijo z drugim sistemom.

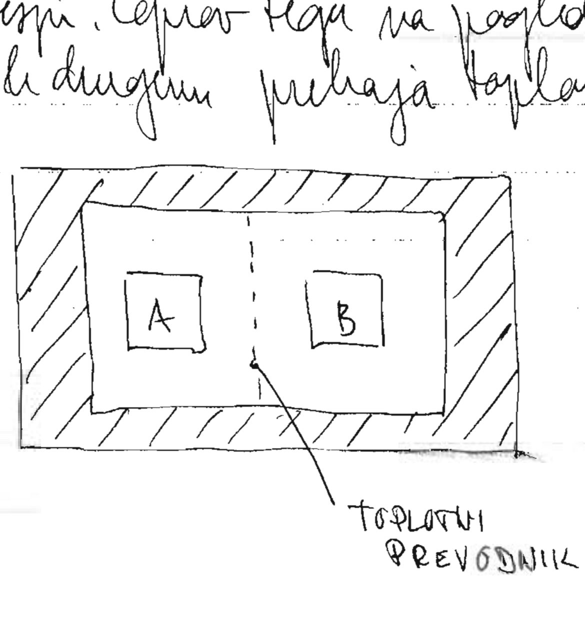
3.1. Temperatura in toplotno ravnovesje

Definicija temperature je v termodinamiki prišla sorazmerno pozno, saj je na pogled trivialna. Temperaturo teles povežemo z ravnovesnimi stanji ~~tela~~ sistema.

Imejmo sistema A in B, ki sta med seboj toplotno izolirana (ne moreta si izmenjevati niti snovi niti energije med seboj), kakor tudi ne z okolico:



Trdimo, da imata telesi A in B vsak svojo temperaturo T_A in T_B, ki sta lahko med seboj enaki ali različni. Vsak od teh sistemov je v termičnem ravnovesju. Ko pregrado iz izolatorja nadomestimo s toplotno prevodno pregrado (npr. iz kovine), ugotovimo, da telesi nista več v ravnovesju. Čeprav tega na pogled ne zaznamo, od enega telesa k drugemu prehaja toplota.



Po dolgem času telesi preideta v ravnovesno stanje, takrat pravimo, da imata enaki temperaturi. Telesi, ki sta v toplotnem stiku in sta v termičnem ravnovesju, imata enaki temperaturi.

V zvezi s temperaturo včasih navajamo tudi "ničti" zakon termodinamike: Če sta telesi A in B v termičnem ravnovesju s tretjim telesom C, potem sta tudi v termičnem ravnovesju med seboj.

Ugotovili smo, da je zgoraj podana v bistvu definicija temperature oziroma načina, na kateri temperaturo merimo. A in B sta dve telesi, C pa termometer. Ker sta A in B v ravnovesju s C imata enako temperaturo kot termometer C, zato imata tudi med seboj enaki temperaturi. Temperaturo teles torej merimo na ta način, da termometer spravimo v dober toplotni stik s sistemom in počakamo, da pride v ravnovesje (da se segreje ali ohladi na temperaturo A-ja). Ko se stanji uravnovesi, imata obe telesi (sistema) enaki temperaturi.

Za meritve temperature uporabljamo dejstvo, da so snovne lastnosti odvisne od temperature. Temperaturno skalo (t.j. merilo za temperaturo) definiramo na podlagi "referenčnih temperatur", to je glede na ~~ne~~ nekatera stanja ki jih srečamo v naravi. V začetku so ljudje uporabljali različne referenčne točke, danes pa je točno določeno, katere točke so to. Poznamo absolutno in Celzijevo skalo

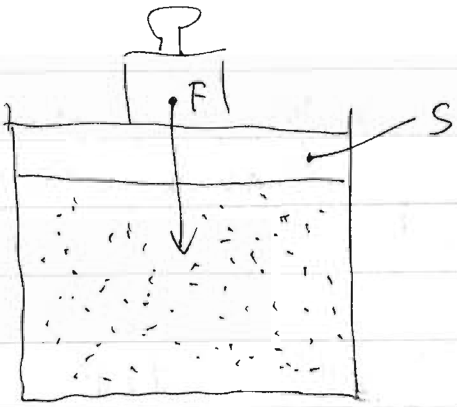
~~Tališče zlata~~	Kelvin [K]	Cel. [°C]	
tališče zlata	1337.33K	1064.2	
tališče aluminija	933.47K	660.3	
tališče galija	302.9K	29,75	
vrelišče ~~t~~ vode	373,13K	100°C	X
trojna točka vode	273,15K	0°C	tlak 0.0062 bar
trojna točka argona	83,8K	−189.35	~~tl~~
trojna točka vodika	13.8K	−259.35	tlak 0,072 bar

podatki za tlak 1 bar

Dogovorjeno je, da so te in še nekatere druge "stalne" (referenčne) točke za temperaturno skalo. Na ta način se po celem svetu umerjajo termometri.

Pogledali si bomo nekaj primerov termometrov

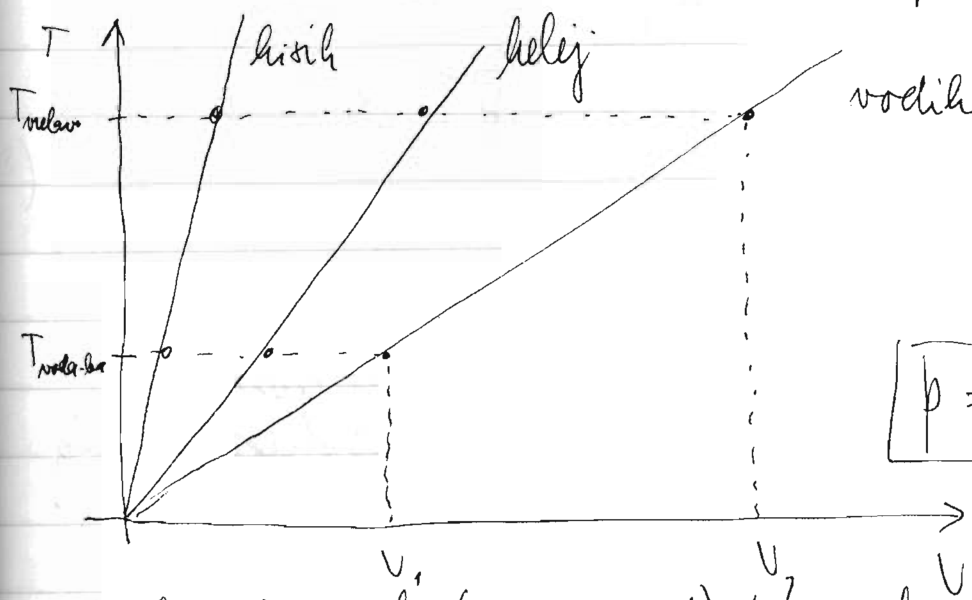
1) Plinski termometer. To so najstarejši termometri, ki so se nekdaj uporabljali v fiziki. Danes jih več ne uporabljamo, ker so preveč nerodni. Termometer sestavlja posoda s plinom pod stalnim tlakom:



$p = \frac{F}{S}$ tlak v plinu

Izmerimo volumen plina pri različnih točkah (v začetku sta bili samo 2, nato pa so vmes skalo ekstrapolirali):

$\boxed{T \; M \cdot V}$



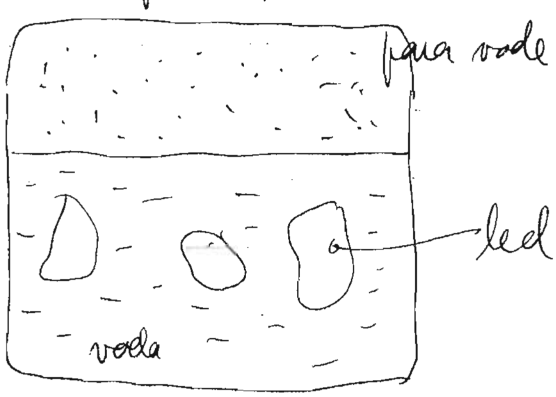
$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M} \cdot R$

izberemo določeno maso plina

$\boxed{p = konst}$

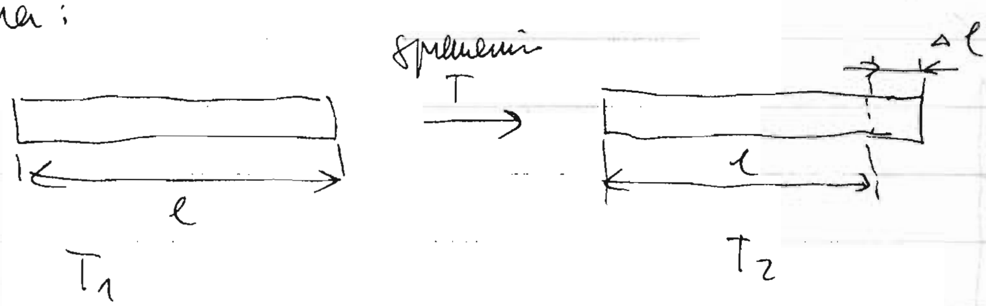
Iz dveh referenčnih (dogovorjenih) temperatur nato ekstrapoliramo temperaturno skalo, tako da rečemo da je vmes 100 K, trojna točka vode pa je pri 273.15 K

Trojna točka vode:



Plinski termometri ne delujejo dobro pri nizkih T, ker se plini utekočinijo. Pri visokih temperaturah so težave zaradi ionizacije plinov.

2) tekočinski termometri: uporabljajo dejstvo, da se tekočine in trdne snovi raztezajo z naraščanjem temperature. Pri trdnih snoveh srečamo koeficient dolžinskega raztezka:



velja približno linearna enačba:

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

α ... koeficient dolžinskega raztezka

~~Al~~ snov	α
Al	$2.4 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$
invar	$0.09 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$
steklo	$0.8 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$

$\Delta l = 1m \cdot 2 \cdot 10^{-5}\,K^{-1} \cdot 100K =$
$= 2 \cdot 10^{-3}\,m = 2mm$

Palica iz Al se podaljša za 2mm, če jo segrejemo za 100K

Pri tekočinah običajno navajamo koeficient prostorninskega raztezka, ker tekočine nimajo stalne oblike

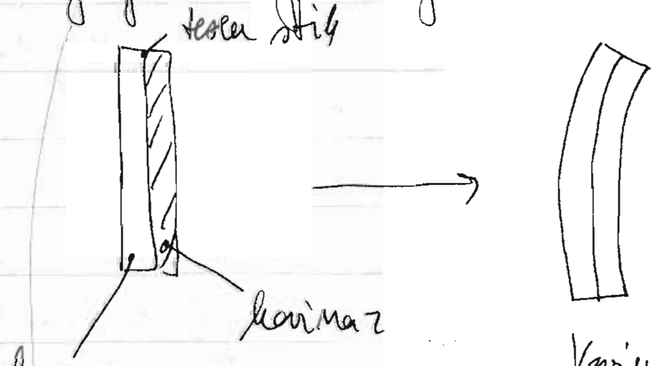
$$\Delta V = V \cdot \beta \cdot \Delta T$$

ΔV ... sprememba volumna
β ... koeficient volumskega raztezka
ΔT ... sprememba temperature

Voda se ne obnaša tako enostavno v bližini zmrzišča. Gostota je največja pri $+4°C$, nato začne padati. V narašča, ko nižamo temperaturo.
Tekočinski termometri: etanol ali Hg

	β
etanol	$11.5 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$
Hg	$1.8 \cdot 10^{-4}\,K^{-1}$

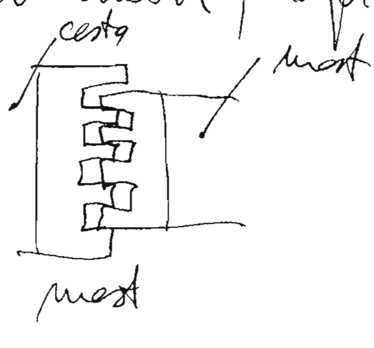
3) Bimetali: sestavljeni so iz dveh različnih kovin, ki se pri spremembi temperature različno raztezata. Posledica je ukrivljenje ali deformacija.



Kovina 1 se bolj raztegne od kovine 2.

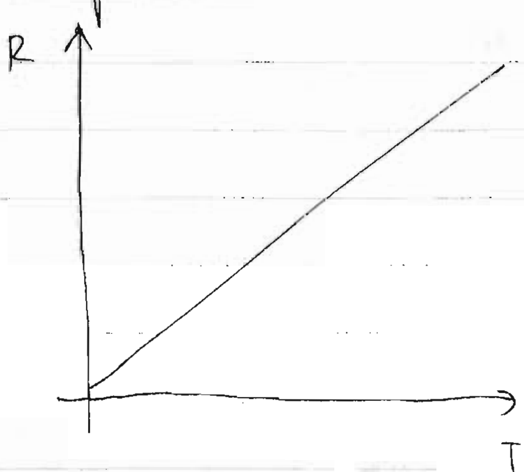
Bimetale bolj uporabljamo kot termična stikala.
Raztezki kovin so pomembni v gradbeništvu, npr. cevovodi, motori.

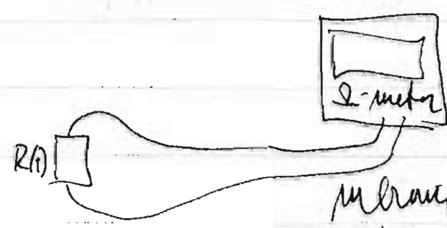
cevovod



most

4. Poleg tekočinskih termometrov, ki jih uporabljamo v vsakdanjem življenju, se v industriji in raziskavah uporabljajo predvsem uporovni termometri. Ti delujejo na principu temperaturne odvisnosti električnega upora snovi. ~~Kovine~~ Pri kovinah upor narašča linearno s temperaturo:





merimo upornost termometra

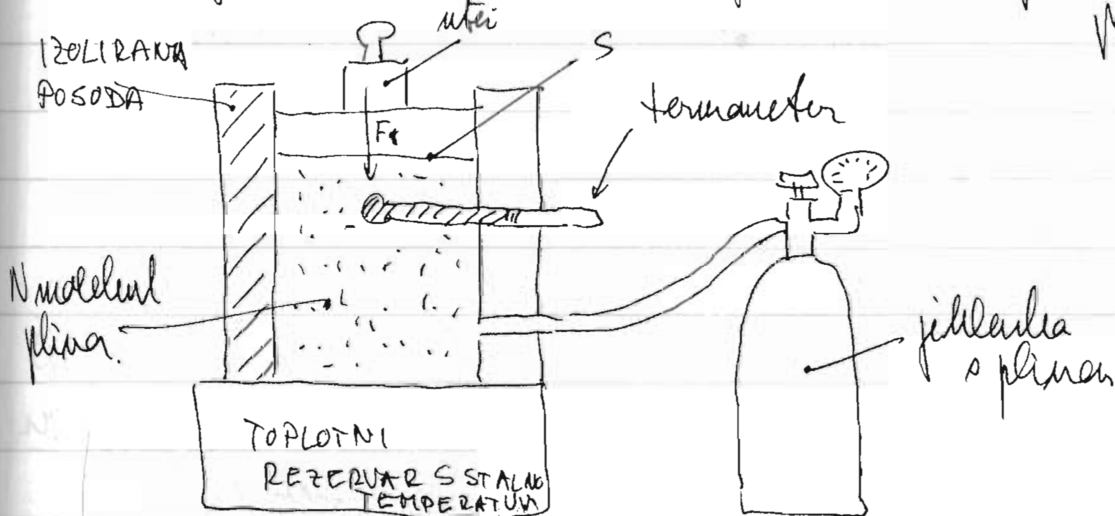
V praksi uporabljamo Pt upore. To so tovarniško majhni elementi (1x1mm), zanesljivi, mogoče pa je meriti temperaturo na 0.001K natančno.

Vse te oblike termometrov odpovedo pri nizkih temperaturah (nekaj K), ker gredo nekatere lastnosti proti 0. V tem področju merimo temperaturo ~~po~~ na drugačen način. Najnižje temperature, ki so jih dosegli so 10^{-8} K.

3.2. Enačba stanja idealnega plina

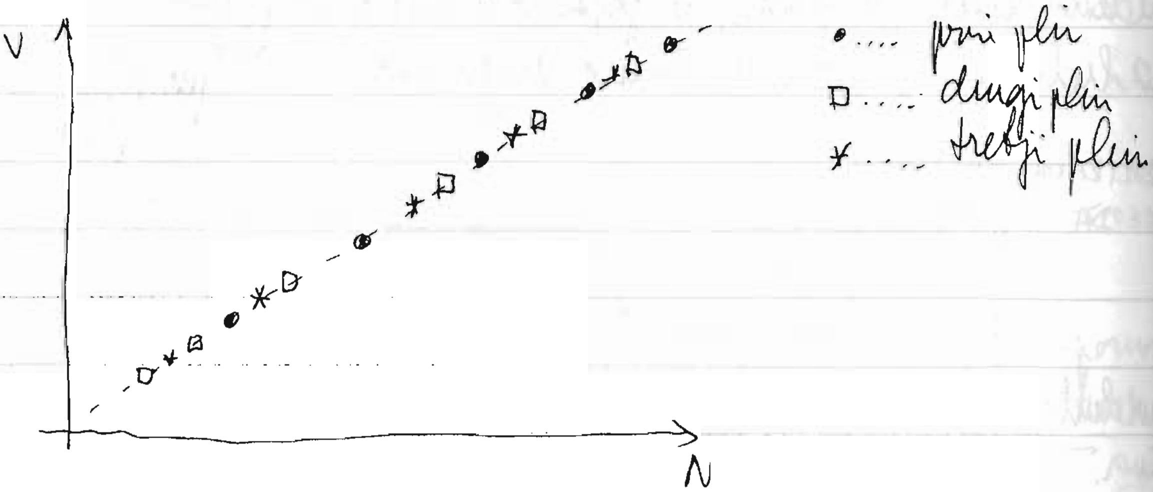
Sedaj, ko smo spoznali, kako merimo temperaturo, si poglejmo makroskopske lastnosti idealnega plina. Idealni plin je plin, ki je zelo razredčen. Naredimo naslednjo eksperimentalno napravo:

Temperatura plina ni previsoka da ne pride do ionizacije plina.



Z utežjo in premičnim batom določamo pritisk v plinu. S toplotnim rezervarjem določamo temperaturo, ki jo merimo s termometrom. Iz jeklenke dovajamo plin v posodo. Količino dovedenega plina bomo merili v številu molekul N, ki je v posodi.

1. Poskus: $p = konst$, $T = konst$, povečujemo število molekul plina N v posodi. Ugotovimo, da prostornina plina linearno narašča s številom molekul v posodi



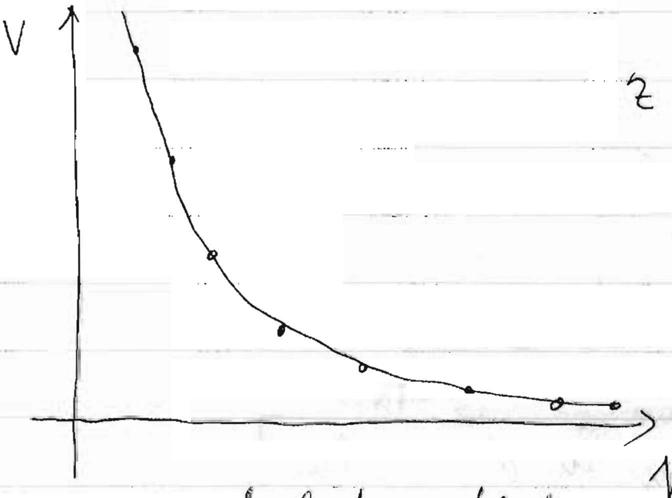
Volumen, ki ga zavzema določeno število molekul ni odvisen od vrste plina (velikosti molekul) temveč samo od števila molekul. To je Avogadrov zakon. Ta zveza velja pri nizkih gostotah, ko so molekule plina daleč narazen.

$$\boxed{V = C \cdot N}$$

V .... volumen plina
N .... število molekul v posodi
C .... sorazmernostna konstanta

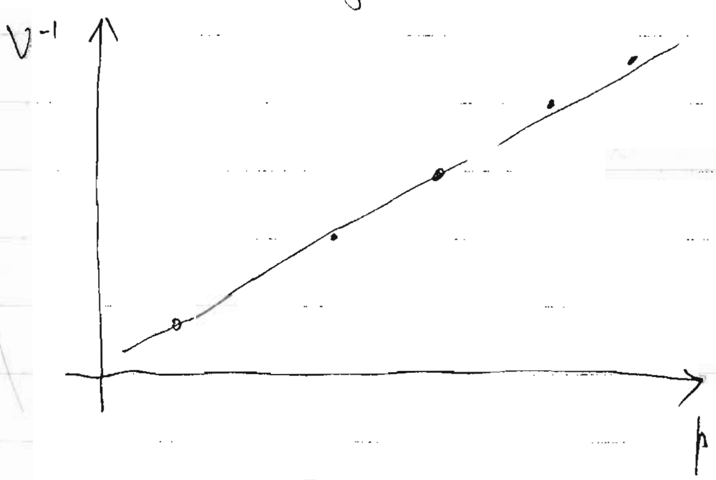
Avogadrov zakon

(2.) Poskus: N = konst, T = konst. Ohranimo določeno število delcev plina v posodi, temperatura v posodi je stalna. Poiščemo zvezo med p in V



Z naraščajočim tlakom se volumen plina manjša pri isti temperaturi in istem številu delcev

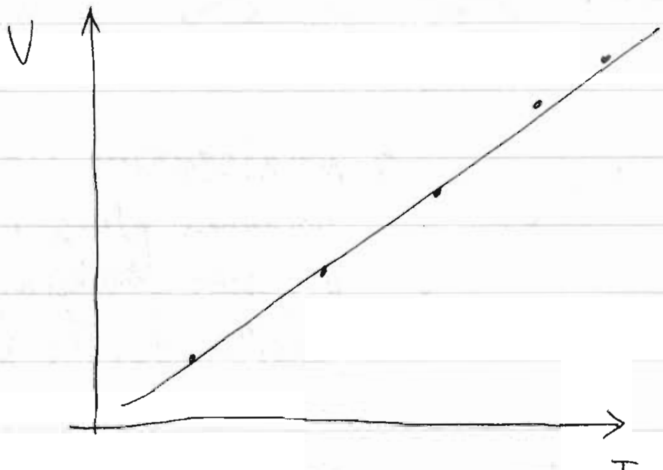
Če rišemo V^{-1} kot funkcijo tlaka, dobimo premico:



Iz tega sledi: $\boxed{p = \frac{C'}{V}}$ N = konst, T = konst

Boylov zakon

3. Poskus: $p = konst$, $N = konst$, spreminjam T in merim V.
Prostornina linearno narašča s temperaturo



$\boxed{V = C'' \cdot T}$ Gay-Lussacov zakon

$$\left.\begin{array}{l} V = C \cdot N \\ p = \frac{C'}{V} \\ V = C'' \cdot T \end{array}\right\}$$

Vsem trem zakonom je zadoščeno s skupnim plinsko enačbo:

$$\boxed{\frac{p \cdot V}{T} = N \cdot k_B}$$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$ Boltzmanova konstanta
N ... število molekul (atomov) v danem sistemu.

Namesto števila molekul pogosto uporabljamo število molov snovi, ki je definirano z Avogadrovim številom N_A

$$\boxed{n = \frac{N}{N_A}}$$

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ delcev/mol
vsak mol snovi vsebuje $6.022 \cdot 10^{23}$ delcev
To je eksperimentalno določeno število, povezano je z dejstvom, da 1 mol ^{12}C ima maso 12 g. To je definicija mase snovi.

$N = n \cdot N_A \Rightarrow \frac{p \cdot V}{T} = N \cdot k_B = n \cdot \underbrace{N_A \cdot k_B}_{=R}$

Definiram splošno plinsko konstanto

$R = N_A \cdot k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\, JK^{-1} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1} =$
$= 8{,}3145\, J K^{-1} mol^{-1}$

$$\boxed{R = 8{,}3145\, J K^{-1} mol^{-1}}$$

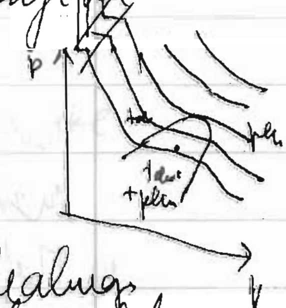
$$\boxed{\begin{array}{l} p \cdot V = n \cdot R \cdot T \\ p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \end{array}}$$

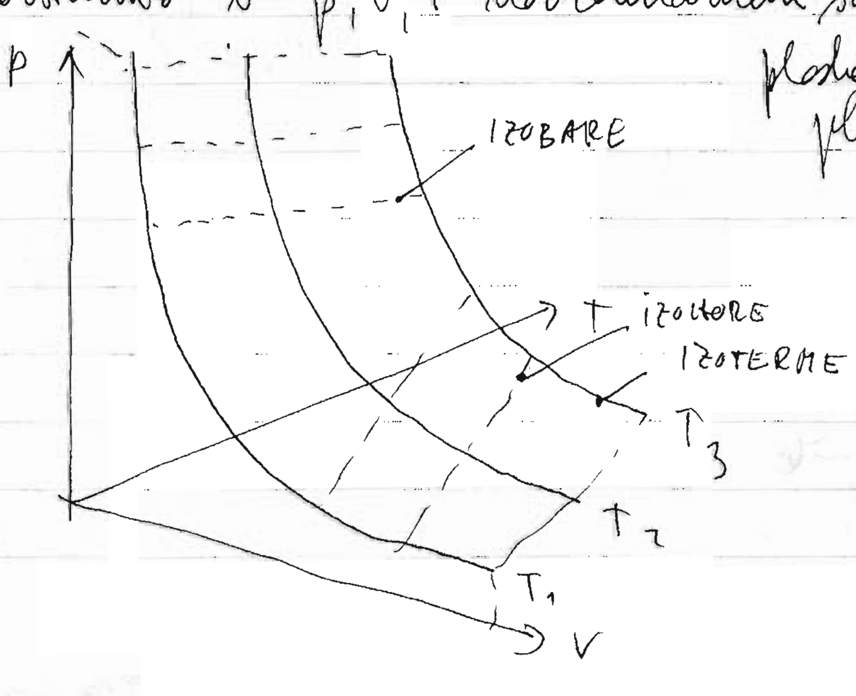
$n = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{M}$

$\hookrightarrow \frac{N \cdot m_0}{N_A \cdot m_0}$!

M ... molska masa (masa 1 mola v g) ali kg

Tej enačbi pravimo tudi enačba stanja idealnega plina.
Enačba stanja: povezuje osnovne termodinamske spremenljivke p, V in T.
Enačbo stanja idealnega plina si lahko tudi grafično predstavimo v p, V, T koordinatnem sistemu:





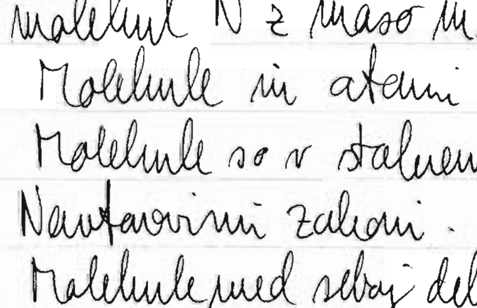
ploskev stanj idealnega plina tvori hiperbolični stožec. Pri nizkih temperaturah ni dobimo fazne prehode, ki jih bomo obravnavali posebej.

3.3. Kinetična interpretacija tlaka in temperature idealnega plina. Notranja energija enoatomnega plina

Postavili bomo enostaven model enoatomnega plina: poenostavljena slika plina, s katero lahko na enostaven način izračunamo nekatere ~~last~~ termodinamske lastnosti plina. ~~Predpostavimo~~ V okviru kinetične teorije predpostavimo da imamo plin, ki zadošča naslednjim zahtevam:

1. V sistemu z volumnom V je zelo veliko število molekul N z maso m_0 (ali atomov)
2. Molekule in atomi se obnašajo kot točkasti delci
3. Molekule so v stalnem gibanju, ki ga opišem z Newtonovimi zakoni.
4. Molekule med seboj delujejo s silami samo v času trkov. Zaradi tega je hitrost molekul stalna (med trki).

Poglejmo si, kako lahko izračunamo iz tako enostavnega modela tlak v plinu, s čim je povezan. Molekule trkajo ob steno posode, trki so elastični, zato na steno izvajajo sunke sile.



Pri vsakem trku ~~se~~ ~~ko~~ s steno se hitrost molekul glede na steno obrne:

$\vec{v}_x' \longrightarrow \vec{v}_x$

Sprememba gibalne količine v smeri x za eno molekulo pri trku je:

$$\Delta G = +m_0 \cdot v_x - (-m_0 \cdot v_x) = +2 m_0 \cdot v_x$$

~~Sila Sem~~ Izberemo si nek časovni interval Δt, v katerem molekula trči ob steno. Časovno povprečen sunek sile ene molekule ob trku s steno je

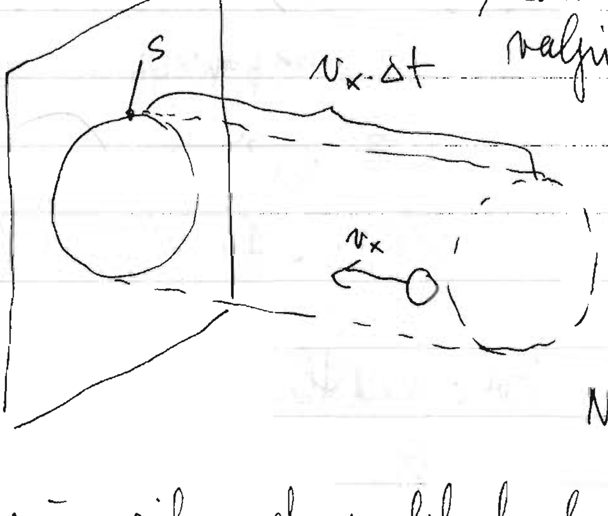
$$\int F_x(t)\,dt = \overline{F_x}(1)\,\Delta t = +\Delta G = 2 \cdot m_0 \cdot v_x$$

Ena molekula torej v času Δt deluje s povprečno silo

$$\overline{F}(1) = \frac{2 m_0 v_x}{\Delta t}$$

V času Δt je steno zadelo mnogo molekul. Koliko?
Vzemimo ploskev stene s ~~povr~~ površino S:

V času Δt to ploskev zadenejo vse molekule, ki se nahajajo v valju dolžine $v_x \cdot \Delta t$.
Teh molekul je:



N ... celotno število molekul v posodi z V

$$N^* = \frac{N}{V} \cdot S \cdot v_x \cdot \Delta t \cdot \frac{1}{2}$$

pol jih gre proti steni, pol. pa nasproti

N^* ... število molekul, ki v času Δt zadenejo steno

Povprečna sila vseh molekul, ki v času Δt zadenejo steno

Povprečiti

$$F_x = \frac{m_0}{V}\left(N_1 v_{x1}^2 + N_2 v_{x2}^2 + N_3 v_{x3}^2 + \dots\right) = \frac{m_0 \cdot N \cdot \langle v_x^2 \rangle}{V} = \rho \cdot \langle v_x^2 \rangle$$

$$F_x = N^* \cdot F_x(1) = \frac{N^* \cdot 2 \cdot m_0 \cdot v_x}{\Delta t} = \frac{N_0}{V} \cdot \frac{S \cdot v_x \cdot \cancel{\Delta t} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot m_0 \cdot v_x}{\cancel{\Delta t}} = \frac{N_0}{V} \cdot S \cdot m_0 \cdot v_x^2$$

skupna masa v volumu V

Ustrezen tlak pa je: $p = \frac{F_x}{S} = \frac{N_0 \cdot m_0 \cdot v_x^2}{V} = \frac{m}{V} \cdot v_x^2 = \rho \cdot v_x^2$

Dobili smo izraz: $\boxed{p_x = \rho \cdot v_x^2}$

Tlak, ki ga zaradi trkov izvajajo molekule na stene posode je sorazmeren s kvadratom

To velja ~~za v~~ če bi imele molekule vse enake hitrosti. V resnici nimajo vse molekule plina enakih hitrosti. Ene prispevajo več, druge manj. Ker je vsi Zato moramo izraz za tlak računati kot povprečje.

$$\boxed{\langle p \rangle = p = \rho \langle v_x^2 \rangle}$$

Tlaki se seštevajo, zato

Sedaj smo se omejili samo na v_x; velja pa

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$

vsa povprečja so enaka

$$= 3 \cdot \langle v_x^2 \rangle \Rightarrow$$

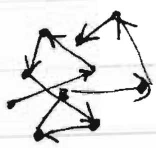
$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle}$$

Zveza med tlakom in povprečnim kvadratom velikosti hitrosti.

Če za pline izračunam $\sqrt{\langle v^2\rangle}$, dobimo zelo velike hitrosti pri sobni temperaturi: 0°C: $\sqrt{\langle v^2\rangle} \approx 300\,m/s$

Čeprav je gibanje hitro, se dejansko molekule ne premaknejo prav daleč. Zaradi trkov se njihove smeri stalno menjavajo, in dobimo t.im. Brownovo gibanje: slučajno gibanje, ker so trki slučajni.



Iz izraza $p = \frac{1}{3}\rho\cdot\langle v^2\rangle$ poskusimo dobiti zvezo med hitrostmi molekul in temperaturo. Po občutku bi rekli, da se z naraščajočo temperaturo hitrosti povečujejo:

$$p\cdot V = \frac{1}{3}\cdot\rho\langle v^2\rangle\cdot V \qquad \rho\cdot V = m = N\cdot m_0$$

$$p\cdot V = \frac{1}{3}\langle v^2\rangle\cdot N\cdot m_0 = n\cdot R\cdot T = \frac{N}{N_A}\cdot R\cdot T = N\cdot k_B\cdot T$$

$$\frac{1}{3} m_0\langle v^2\rangle\cdot N = N\cdot k_B\cdot T$$

$$m_0\langle v^2\rangle = 3\cdot k_B\cdot T$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m_0\langle v^2\rangle = \frac{3}{2} k_B\cdot T}$$

$$\frac{1}{2} m_0\langle v^2\rangle = \langle W_k\rangle$$

povprečna kinetična energija zaradi translacijskega gibanja.

Vidimo, da se translacijska kinetična energija molekul plina linearno povečuje s temperaturo.

Kolikšna pa je celotna translacijska energija plina, ki ga sestavlja N molekul:

$$W_n = N \cdot \frac{1}{2} m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} N \cdot k_B \cdot T = \frac{3}{2} n \cdot N_A k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

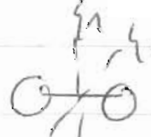
$$= \frac{3}{2} \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

Dobili smo izraz za notranjo (celotno translacijsko) energijo enoatomnega plina:

$$\boxed{W_n = \frac{3}{2} \frac{m}{M} \cdot R \cdot T}$$

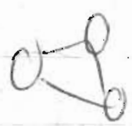
Notranja energija plina je odvisna samo od temperature. Če bi imeli plin, ki ga sestavljajo molekule, bi morali upoštevati še rotacijsko energijo: Na vsako prostostno stopnjo (translacija, rotacija) odpade na vsako molekulo $\frac{1}{2} k_B T$ energije.

Pozor: Zgornje velja samo za idealne pline. Ne velja za kapljevine ni trdno snov!!!

Dvoatomni plini: 

še 2 prostostni stopnji za rotacijo

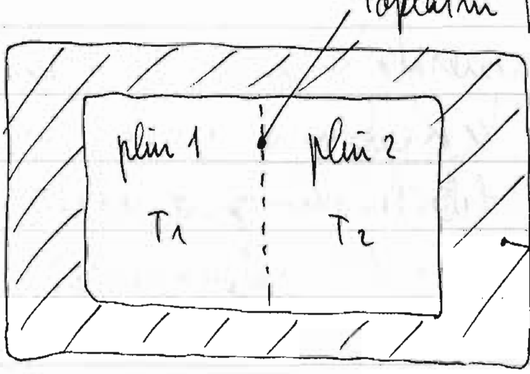
$$\langle W_k \rangle = \overbrace{\frac{3}{2} k_B T}^{\text{translacija 3 smeri}} + \overbrace{\frac{2}{2} k_B T}^{\text{rotaciji okoli dveh osi}} = \frac{5}{2} k_B T$$

Triatomni plini: 

$$\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T + \frac{3}{2} k_B T = \frac{6}{2} k_B T$$

3.4. Energijski zakon: toplota, delo, notranja energija in specifična toplota

<u>Toplota</u>: toplota je energija, ki prehaja med telesi, ki so v toplotnem stiku in imajo različne temperature. Toplota prehaja s telesa z višjo temperaturo k telesu z nižjo temperaturo



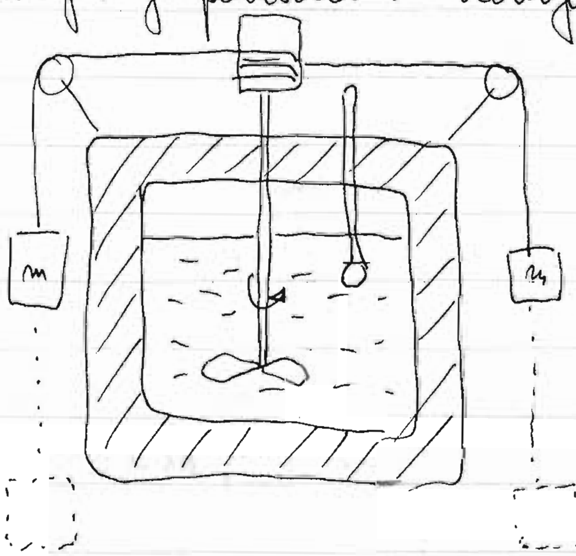
Če damo dva plina z različnima temperaturama v toplotni stik, potem se začneta temperaturi plina spreminjati.

Toplejši plin se ohlaja hladnejši pa segreva. Ker smo videli da je notranja energija odvisna samo od temperature, se notranja energija toplejšega plina manjša, notranja energija hladnejšega plina pa poveča. To traja dokler se temperaturi ne izenačita.

Plinu št. 1 se je notranja energija zmanjšala

$$dW_{n_1} = -dQ \qquad \text{oddal je toploto } dQ$$
$$dW_{n_2} = +dQ \qquad \text{prejel je toploto } dQ.$$

Notranjo energijo lahko spreminjamo tudi z dovajanjem ali odvajanjem zunanjega dela. To izmerimo v Joulovem poskusu: vodo v toplotno izolirani posodi mešamo. Mešalo poganjamo z utežmi, tako da poznamo celotno delo, ki ga dovedemo. Posledica je segrevanje vode, torej se je povišala notranja energija vode:



mešalo se vrti zaradi uteži. Ko se ustavi, poznamo celotno delo, ki smo ga dovedli (iz razlike potencialnih energij)

V tem poskusu je $dW_n = + dA$. Notranjo energijo torej lahko spreminjamo na dva načina: z dovajanjem toplote ali z dovajanjem dela. Če toploto ali delo dovajamo, ju štejemo pozitivno, če ju odvajamo, ju štejemo negativno. Enota za toploto je enaka enoti za delo oziroma energijo in je [J] (Joule). Obe ugotovitvi združimo v prvi zakon termodinamike:

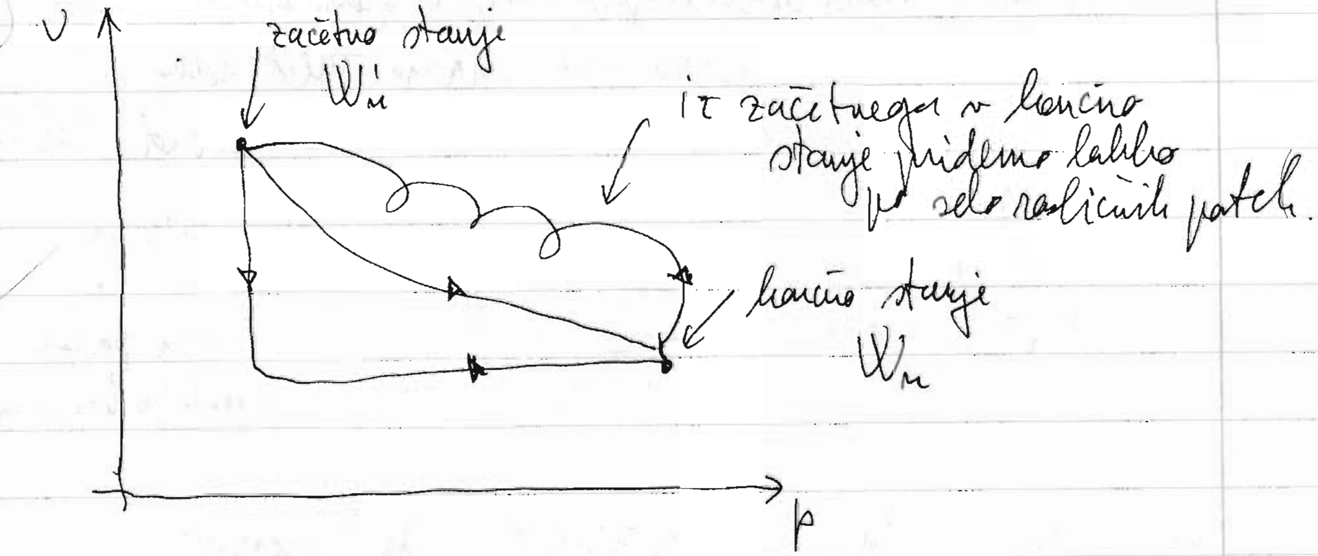
$$\boxed{W_k - W_k' + W_p - W_p' + W_n - W_n' = A + Q}$$

Sprememba polne energije (W_k, W_p in W_n) je enaka dovedenemu delu ~~in dove~~ zunanjih sil razen sile teže in dovedeni toploti.

Pogosto ~~se~~ telesa mirujejo, v tem primeru se kinetična in potencialna energija ohranjata, tako da gre celotno delo v spremembo notranje energije:

$$W_n - W_n' = A + Q \quad \text{če telo miruje}$$

Pri tem smo uvedli pojem notranje energije, ki je enolična funkcija stanja, to je znanih termodinamskih spremenljivk (p, V, T...). Vsakemu stanju v p, V, T diagramu (stanje označimo z vrednostjo p, V in T) pripišemo tako določeno vrednost notranje energije:



Ker je W_n enolična funkcija znanih termodinamskih spremenljivk (pri danem p, V in T ima eno samo vrednost), je razlika notranjih energij med začetnim in končnim stanjem neodvisna od poti, po kateri pridemo iz začetnega v končno stanje:

$W_n - W_n'$: neodvisna od poti (načina), po kateri v p, V, T diagramu pridemo iz začetnega stanja v končno.

Kaj točno sestavlja notranjo energijo snovi? To je odvisno od tega, kako je snov zgrajena, oziroma v katerem fazi je. Najlažje si to razjasnimo na primeru plina: molekule plina se lahko translacijsko gibljejo in vrtijo, če so vsaj dvoatomne.

Notranja energija plina: $$W_n = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 + \frac{1}{2} J_i \omega_i^2 \right)$$

translacija molekul

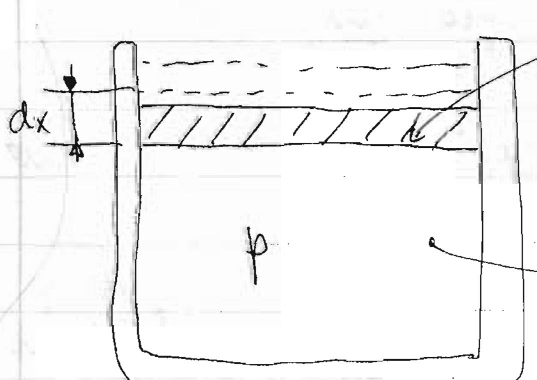
rotacija molekul

Notranja energija trdnega kristala: atomi v mreži nihajo, torej imajo kinetično energijo zaradi translacije. Vendar atomi v kristalu močno interagirajo med seboj s silami – potencialna energija parov atomov se tudi lahko spreminja.

$$W_n = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(r)$$

potencialna energija parov atomov sešteta po vseh parih v kristalu.

Omenimo še, da pri delu zunanjih sil pogosto obravnavamo delo tlaka. Poglejmo, kaj je s tem mišljeno:



na steno bata plin pritiska s silo $p \cdot S = F$

plin s tlakom p

ko se bat počasi premakne za dx navzven, plin ~~kastane~~ opravi delo tlaka:

$$dA = -F \cdot dx = -p \cdot S \cdot dx = -p \cdot dV$$

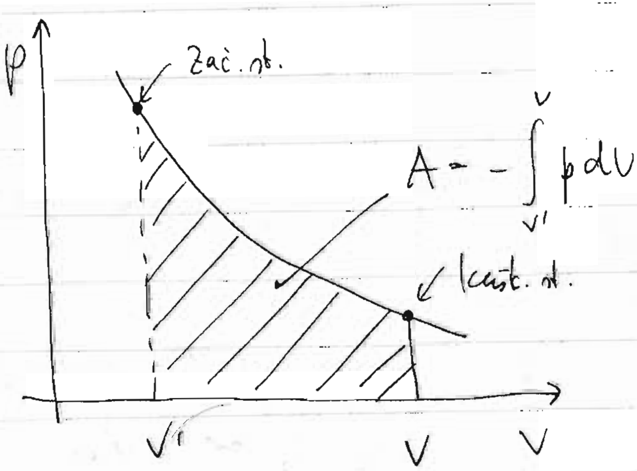
delo štejemo negativno, ker plin oddaja delo

$$\boxed{dA = -p \cdot dV}$$

Ta izraz velja splošno, ne samo za pline, temveč tudi za trdna in tekoča stanja. Celotno delo dobimo z integriranjem

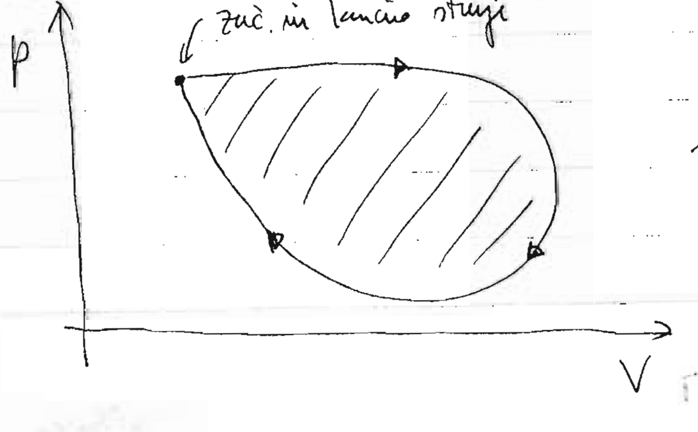
$$\boxed{A = -\int_{V'}^{V} p \cdot dV}$$

V diagramu stanj to ustreza naslednji sliki.



Delo tlaka je enako ploščini pod krivuljo. (negativno)

Če gremo iz začetnega stanja po neki zaključeni krivulji nazaj je delo različno od nič!!! To je krožna sprememba:



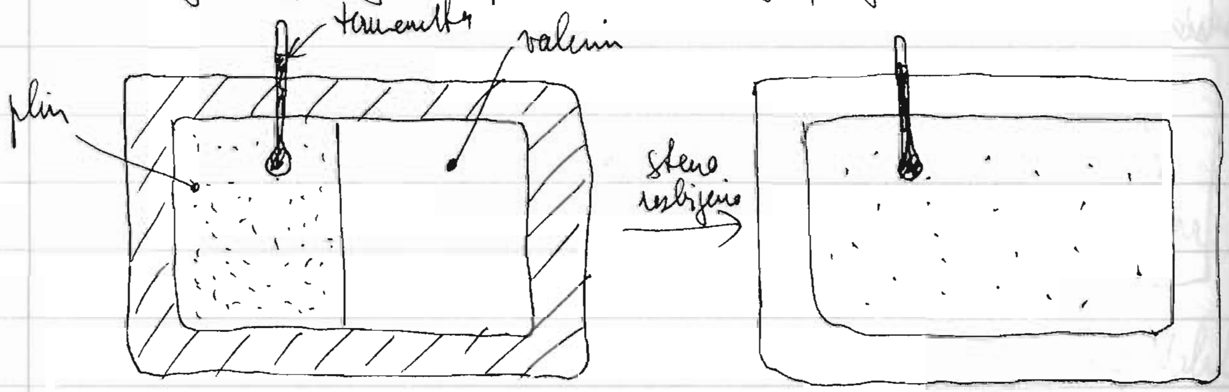
pri krožni spremembi
Delo torej ni enolična funkcija stanja!!!
Za razliko od W_n!

krajša sprememba

Pri zaključeni poti je $W_n = W_n'$ ⇒ po energijskem zakonu

$$0 = A_{krožni} + Q_{krožni} \Rightarrow Q = -A = \oint p\,dV$$

V zvezi z energijskim zakonom moramo omeniti še Hirnov poskus z idealnim plinom. Plin zapremo v toplotno izolirano posodo, ki je s pregrado predeljena na dva dela. En del je napolnjen s plinom, drugi pa je evakuiran:



Tedaj, ko steno razbijemo, ostane temperatura nespremenjena. To pomeni, da je sprememba notranja energija enaka.

$0 = A + Q$ 	$Q = 0$ ker je toplotno izoliran

$A = 0$ ker je $p_{zun} = 0$ zunanji tlak je zanemarljivo majhen.

Poskus pokaže, da je $W_n = W_n(T)$, odvisna samo od temperature, ne od tlaka niti prostornine. To velja samo za idealne pline.

Specifična toplota: če sistemu dovedemo toploto, se mu spremeni temperatura. Želimo dobiti zvezo med dovedeno toploto Q in spremembo temperature ΔT:
Velja:

$$Q = W_n - W_n' - A = W_n - W_n' + \int_{V'}^{V} p\,dV$$

Razlikujemo dve vrsti specifičnih toplot.

i) specifična toplota pri konstantnem volumnu, $V = konst.$

$$dQ = dW_n = m \cdot c_v \cdot dT$$ linearna zveza za majhne razlike temperat.

c_v ... specifična toplota pri konstantnem volumnu.

$$Q = m \cdot \int_{T'}^{T} c_v(T)\,dT \approx m \cdot c_v \cdot \Delta T$$, če se c_v ne spreminja s temperaturo!!

$$\boxed{W_n - W_n' = m \cdot c_v \cdot \Delta T}$$

ii) specifična toplota pri konstantnem tlaku, $p = konst$

$$Q = W_n - W_n' + p \int_{V'}^{V} dV = W_n - W_n' + pV - pV' =$$

$$= W_n + pV - (W_n' + pV')$$

Količino $\boxed{W_n + p \cdot V = H}$ imenujemo entalpija.

$$dQ = dW_n + d(p \cdot V) = dW_n + p\,dV + V\,dp$$

$$\boxed{dQ = dH}$$ če je $p = konst$

$$dQ = dH = m \cdot c_p \cdot dT$$

$$\boxed{Q = m \cdot \int_{T'}^{T} c_p(T) \cdot dT = \Delta H}$$

Običajno se sistem širi, ko mu dovajamo toploto in je tlak konstanten. V tem primeru gre del dovedene toplote v obliki dela ven iz sistema (npr. plin se pri $p=konst$ razširi, če mu dovedemo toploto), tako da se notranja energija spremeni (in s tem tudi temperatura) za manjšo vrednost kot pri $V=konst$. Velja obratno, za ~~dano~~ želeno spremembo temperature moramo pri $p=konst$. dovesti več toplote, kar pomeni da je $c_p > c_v$. Pri dvoat. plinih $c_p/c_v \approx 1.4$.

3.5. Specifična toplota idealnega plina

Izračunali bomo razliko specifičnih toplot c_p in c_v pri idealnem plinu. Naredili bomo dve vrsti sprememb:

začetno stanje p', V', T'

izobarna sprememba $p = \text{kost}$

izohorna sprememba $V = \text{konst}$

p', V, T

$(Q)_p = m c_p (T - T')$ definicija c_p

$(A)_p = -\int_{V'}^{V} p\,dV = -p'(V - V')$

$\Delta W_n = (Q)_p + (A)_p$

p, V', T

$(Q)_v = m \cdot c_v (T - T')$

$(A)_v = 0$ $\quad dV = 0$

$$\boxed{\Delta W_n = (Q)_v = m \cdot c_v \cdot (T - T')}$$

Spremembi notranje energije sta v obeh primerih enaki, saj je notranja energija odvisna samo od T. Pri obeh spremembah sta zač. in končni T enaki, torej sta tudi spremembi notranje energije enaki:

$$(Q)_p + (A)_p = m \cdot c_v (T - T') \qquad W_n - W_n' = m \cdot c_v (T - T')$$

$$m \cdot c_p (T - T') - \underbrace{p'(V - V')}_{p'(V - V') = \frac{m}{M} R (T - T')} = m \cdot c_v (T - T')$$

$$\cancel{m}\cdot c_p(T-\cancel{T'}) - \frac{\cancel{m}}{M} R(T-\cancel{T'}) = \cancel{m}\cdot c_v(T-\cancel{T'})$$

$$c_p = c_v + \frac{R}{M}$$

$$\boxed{c_p - c_v = \frac{R}{M}}$$

Uvedemo še kvocient specifičnih toplot: $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} > 1$

1) $$c_v(\varkappa - 1) = \frac{R}{M} \Rightarrow c_v = \frac{1}{\varkappa - 1}\cdot\frac{R}{M}$$

2) $$c_p = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\cdot\frac{R}{M}$$

Kako se izraža entalpija: $H = W_n + p\cdot V$

$$H - H' = W_n + pV - W_n' - p'V' = W_n - W_n' + pV - p'V'$$

$$H - H' = m\cdot c_v(T-T') + \frac{m}{M}R(T-T') = m(T-T')\left(c_v + \frac{R}{M}\right) =$$

$$= m\cdot c_p(T-T')$$

$$\boxed{\begin{aligned} H - H' &= m\cdot c_p(T-T') \\ W_n - W_n' &= m\cdot c_v(T-T') \end{aligned}}$$

~~pri stalnem~~ Tadva izraza veljata vedno pri idealnem plinu.

Poglejmo si spremembe notranje energije in entalpiji pri nekaterih plinskih spremembah. To so posebej izbrane spremembe.

1. Izohorna sprememba, $V = konst$, $p', V, T' \to p, V, T$

$$\frac{p'}{T'} = \frac{p}{T}$$

Ker je sprememba izohorna: $(A)_V = -\int_{V'}^{V} p\,dV = 0$. Plin ne opravi nobenega dela.

$$W_M - W_M' = (A)_V + (Q)_V = m \cdot c_v (T - T') \; ; \; (Q)_V = m \cdot c_v (T - T')$$

toplota po definiciji

2. Izobarna sprememba, $p = konst$ $p, V', T' \to p, V, T$

$\frac{V'}{T'} = \frac{V}{T}$ iz plinske enačbe. (Gay-Lussacov zakon)

$$(A)_p = -\int_{V'}^{V} p\,dV = -p(V - V')$$

$(Q)_p = m \cdot c_p (T - T')$ po definiciji

$\Delta W_M = m \cdot c_v (T - T')$

3. Izotermna sprememba $T = konst$ $p', V', T \rightarrow p, V, T$

$p'V' = p \cdot V$ Boylov zakon

$\Delta W_n = W_n - W_n' = 0$ $p'V' = p \cdot V$ $p = \frac{p' \cdot V'}{V}$

$$(A)_T = -\int_{V'}^{V} p\,dV = -\int_{V'}^{V} p'V' \cdot \frac{dV}{V} = -p'V' \int_{V'}^{V} \frac{dV}{V} = -p'V' \ln V \Big|_{V'}^{V} =$$

$$= -p'V' \ln \frac{V}{V'} = p'V' \ln \frac{V'}{V}$$

$$(Q)_T = -(A)_T = p'V' \ln \frac{V}{V'}$$

Če plin raztegnemo $V > V'$, potem moramo dovajati Q, da se temperatura ohrani. Če plin stisnemo izotermno, potem moramo toploto odvajati.

4. Izentropna (adiabatna) sprememba: $Q = 0$

$S = konst$ (entropija plina je konstantna), če je sprememba reverzibilna)

$p', V', T' \rightarrow p, V, T$ splošna sprememba, ker se tiče plinske enačbe.

Ali je mogoče na kakšen način povezati V, T, pV in podobno?

$$\Delta W_n = A + Q = (A)_S \Rightarrow dW_n = dA$$

$$m \cdot c_v \cdot dT = -p\,dV \qquad p \cdot V = \frac{m}{M} RT$$

$$m \cdot c_v \cdot dT = -\frac{m}{M} \cdot RT \frac{dV}{V} \qquad p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$$

$$c_v \frac{dT}{T} = -\frac{R}{M} \frac{dV}{V}$$

$$c_V \frac{dT}{T} = -(c_p - c_V) \cdot \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dT}{T} = -(\varkappa - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\int_{T'}^{T} \frac{dT}{T} = -(\varkappa - 1) \int_{V'}^{V} \frac{dV}{V}$$

$$\ln \frac{T}{T'} = -(\varkappa - 1) \ln \frac{V}{V'} = \ln \frac{V'^{(\varkappa-1)}}{V^{(\varkappa-1)}}$$

$$\frac{T}{T'} = \frac{V'^{(\varkappa-1)}}{V^{(\varkappa-1)}} \Rightarrow \boxed{T \cdot V^{(\varkappa-1)} = T' \cdot V'^{(\varkappa-1)} = konst}$$

$V = a \frac{T}{p} \cdot c$ plustan mas

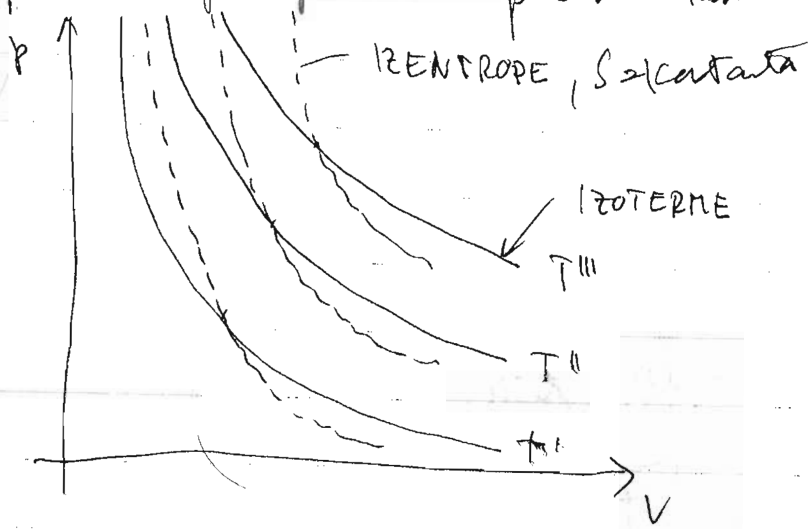
$$T \cdot \frac{T^{(\varkappa-1)}}{p^{(\varkappa-1)}} = konst \Rightarrow \boxed{\frac{T^{\varkappa}}{p^{(\varkappa-1)}} = \frac{T'^{\varkappa}}{p'^{(\varkappa-1)}}}$$

$T = p \cdot V \cdot c_2$

$$\frac{T^{\varkappa}}{p^{(\varkappa-1)}} = \frac{p^{\varkappa} \cdot V^{\varkappa}}{p^{(\varkappa-1)}} = p \cdot V^{\varkappa} = konst$$

$$\boxed{p \cdot V^{\varkappa} = p' V'^{\varkappa}}$$

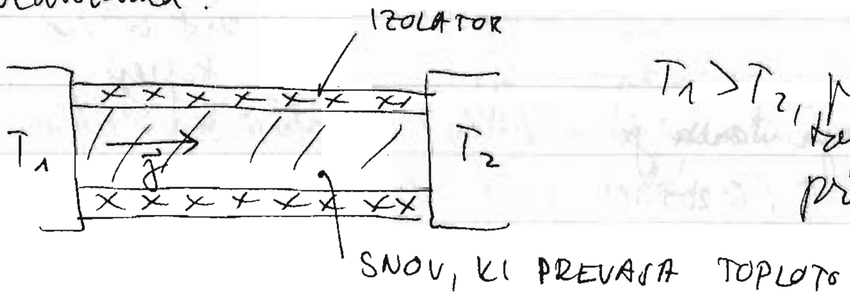
Krivulje se imenujejo izentrope. Če jih pogledamo pri $T = \text{kost}$, potem izgledajo kot: $p \cdot \partial V^{\kappa} = \text{kost}$



3.6. Prenos toplote

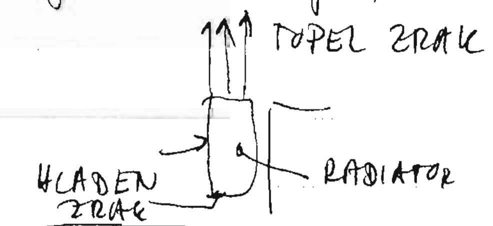
Prenos toplote, oziroma razširjanje toplote je proces, pri katerem energija teče od telesa z višjo temperaturo k telesu z nižjo temperaturo. Prenos toplote poteka na tri načine:

a) s prevajanjem toplote preko snovi. Za ~~pre~~ tovrsten prenos je potrebna snov, bodisi trdna snov, bodisi tekočina ali plin. Pri prevajanju imam dva toplotna rezervoarja z različnima temperaturama:



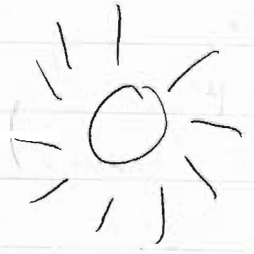
$T_1 > T_2$, potem teče toplotni tok od prvega telesa k drugemu.

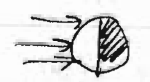
b) s konvekcijo: gre za gibanje toplejših delov snovi in sile vzgona. Običajno se s segrevanjem poveča volumen, zato se gostota zmanjša, snov se dviga. Primer:



Topel zrak je redkejši, zato se zaradi sile vzgona dviga. Podobno situacijo vidimo na strmih, termičnih pobočjih, kjer lebdijo jadralni padalci

c) s sevanjem: sonce oddaja toploto (energijo ki dobi) ki se širi na vse strani. Del toplote ~~se absor~~ v obliki svetlobne energije se absorbira na planetih in jih na ta način greje.



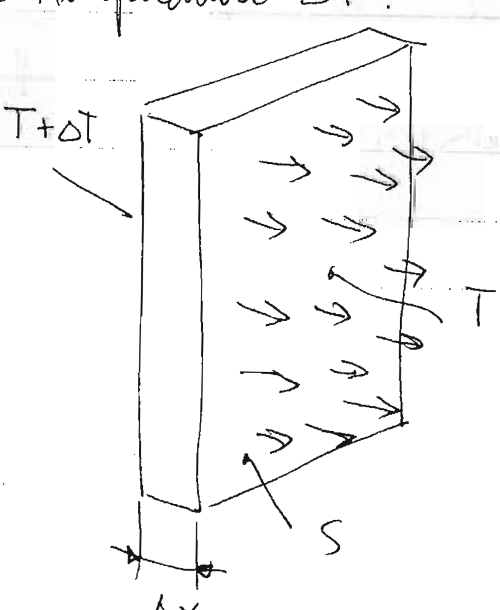


del svetlobnega toka ujame planet in se zaradi tega segreje.

Moč sevanja sonca je $\sim 1 kW/m^2$. Celotna Zemlja absorbira

$$10^3 W/m^2 \cdot \pi \cdot (6.200 \cdot 10^3 m)^2 = 10^3 W \cdot \pi \cdot 6{,}2^2 \cdot 10^{12} W =$$
$$= 120 \cdot 10^{15} W = \underline{1{,}2 \cdot 10^{17} W}$$

ad b) Poglejmo, kako se toplota prenaša s prevajanjem. Vzemimo tanko ploščico iz neke snovi. Ploščica naj ima presek S debelino Δx, med ploskvama pa je razlika temperatur ΔT:



Skozi ploščino S gre vsako sekundo toplota Q.

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

P... moč, toplotni tok, ki gre skozi snov. Ta moč bo sorazmerna z S, sorazmerna z ΔT

$$\boxed{P = -\lambda S \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}}$$

predznak – označuje, da se energija širi od telesa z višjo temperaturo k telesu z nižjo temperaturo.

λ.... toplotna prevodnost

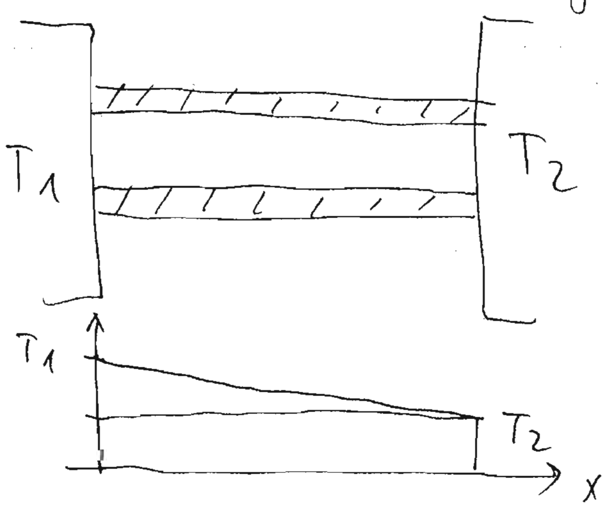
λ = velik $\Rightarrow$ snov je dober toplotni prevodnik, λ = majhen $\Rightarrow$ izolator.

Gostota toplotnega toka je $j = \frac{P}{S} = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$

Tako pa naredimo limito in rečemo $j = -\lambda \frac{dT}{dx}$ $\quad \frac{dT}{dx}$... gradient temperature.

V nekaterih enostavnih geometrijah je enačba

$P = -\lambda \cdot S \frac{\Delta T}{\Delta x}$ enostavno uporabna. Tak primer je recimo palica iz materiala, izolirana po obodu, med dvema toplotnima rezervoarjema



temperatura enakomerno pada po palici, toplotni tok je v vsakem x enak.

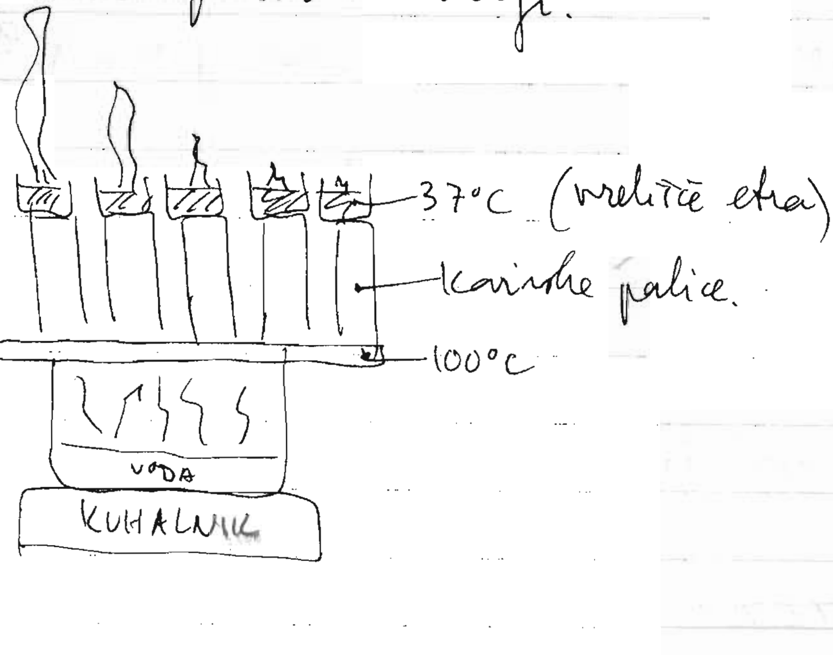
Energija se nikjer ne kopiči. Toplota, ki vstopa na enem koncu palice, tudi izstopa na drugem koncu.
Enačba za toplotno prevajanje je tak

$$P = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x} = -\lambda \cdot S \, \frac{T_1 - T_2}{l}$$

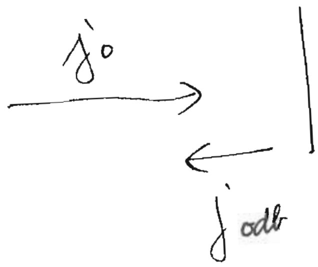
Tabela: toplotne prevodnosti različnih snovi.
Kovine so običajno dobri prevodniki toplote

Baker: $\lambda = 390 \; W/m \cdot K$
Opeka: $\lambda = 0.6 \; W/m \cdot K$
Zrak: $\lambda = 0.025 \; W/mK$
Voda: $\lambda = 0{,}5 \; W/mK$.

Plini so zelo dobri toplotni izolatorji.

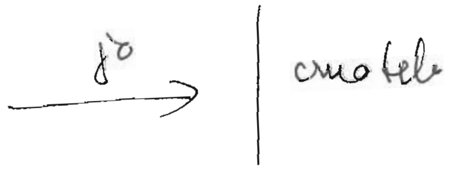


ad c) Sevanje črnega telesa.
Kaj je črno telo?



j_0 ... vpadni ~~tok~~ tok energiji

j_{odb} ... odbiti del svetl. toka



: ne odbije nobenega energijskega toka, vsa energija se absorbira.

Definiramo albedo telesa:

$$j_{odb} = a \cdot j_0 \qquad a \ldots \text{albedo}$$

Za črno telo $a=0$, za belo telo $a=1$ (~~vso svet~~ energijo odbije)

Črno telo dobimo, če predmet počrnimo s sajami.

V naravi pogosto opazimo, da segreto telo seva energijo – vidno svetlobo, običajno pa največ nevidne – infrardeče svetlobe, ki jo zaznamo kot toploto. Primer: taborni ogenj, žarnica, radiator, vroča plošča štedilnika, itd.

Za telesa, ki sevajo svetlobo kot črna telesa, velja poseben zakon (Planckov), ki pove, kolikšen delež energijskega toka Δj telo izseva pri določeni val. dolžini $\Delta\lambda$:

Meritve kažejo, da se vrh $\frac{\Delta j}{\Delta \lambda}$ pomika k krajšim valovnim dolžinam.

$\lambda_0(T)$.... valovna dolžina, pri kateri ima spekter črnega telesa maksimum. se pomika k krajši λ pri višji T. Telo je najprej rdeče, nato rumeno in modrikasto.

To opisuje Wienov zakon

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{k_w}{T}}$$

$K_w = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K$
Wienova konstanta

Za sevanje črnega telesa velja Stefanov zakon (po J. Stefanu). Zakon pravi, da je celotni izsevani energ. tok sorazmeren s T^4

$$\boxed{j = \sigma T^4}$$

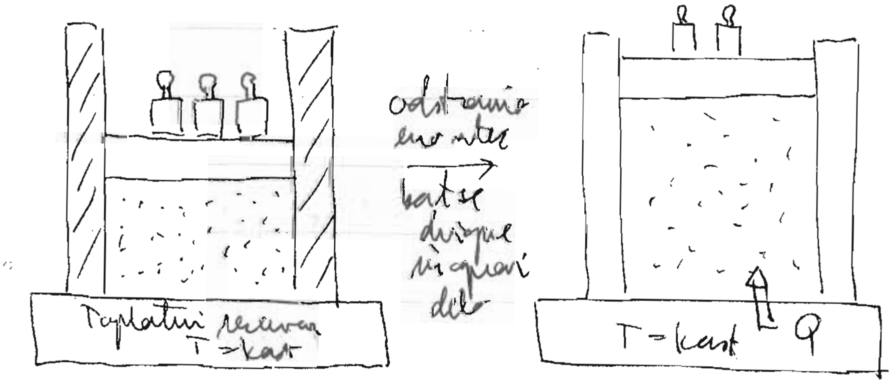
Stefan-~~Boltzmannov~~ zakon sevanja črnega telesa

$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ W\,m^{-2}K^{-4}$ Stefanova konstanta. ②

3.7. Toplotni stroji in hladilniki

Toplotni stroji so naprave, ki prejemajo toploto, oddajajo delo in pri tem ponavljajo krožno spremembo.

Pri toplotnih strojih energija prihaja v stroj v obliki toplote, del te energije pa toplotni stroj spremeni v mehansko delo. Preprost primer toplotnega stroja bi bil premikajoči se bat, ki zapira cilinder, napolnjen s plinom, postavljen na toplotni rezervoar.



Volumen plina se poveča, bat dvigne uteži, poveča njihovo potencialno energijo, torej opravlja delo.

Pri tem sistem prejme nekaj toplote Q iz toplotnega rezervoarja, odda pa delo ~~A~~, ki se porabi za povečanje potencialne energije uteži. Imamo torej toplotni stroj.

Takšen stroj ni uporaben, saj ne more delovati neprekinjeno. Slej ko prej pridemo do situacije, ko bi bila masa uteži enaka nič in stroj bi se ustavil. Bistveno za delovanje toplotnega stroja je delovanje v ciklih: po vsakem ciklu se stroj povrne v začetno stanje in pri tem odda nekaj mehanskega dela. Toplotni stroj ponavlja cikle in na ta način deluje

nespremenjeno. Primeri toplotnih strojev: parni stroj, bencinski motor, plinske (parne) turbine v termoelektrarnah in jedrskih elektrarnah. Toplotni stroji so bistveni za pridobivanje električne in mehanske energije. Od kod dobijo toploto:
iz sežiga goriva = oksidacija, gorenje bencina in premoga. Sprosti se potencialna energija atomov, ki so vezani v kristale ali molekule, na ta način se sprošča toplota. Del tako pridobljene toplote se spremeni v mehansko delo. V jedrskih elektrarnah toploto dobimo z razcepom jeder urana ^{235}U.
Pri jedrskih elektrarnah se sprošča ogromno toplote. S tem ogrevamo vodo, jo uparimo in z njo vrtimo turbine, ki vrtijo generatorje.

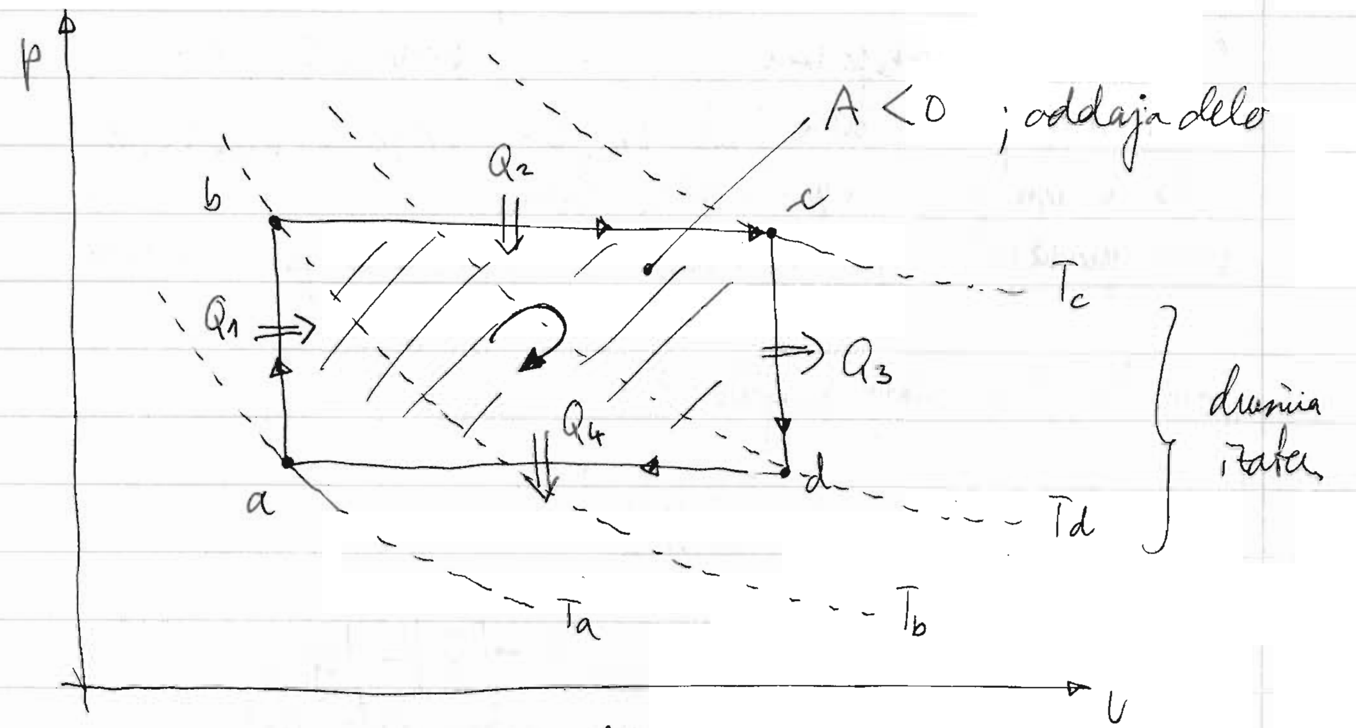
Pri analizi posameznih korakov v ciklu stroja se držimo naslednjih dogovorov:

i) toploto, ki vstopa v stroj, štejemo pozitivno, tisto, ki zapušča stroj pa negativno.

ii) delo pri zmanjševanju volumna štejemo pozitivno ($A = -\int p\,dV$), delo pri povečanju volumna pa negativno.

iii) delo v posameznem ciklu je negativno, če gre sprememba v smeri urinega kazalca in pozitivno, če gre v obratni smeri.

Tipičen primer krožnega cikla (krožne spremembe plina), ki je sestavljen iz 4 korakov, je prikazan na naslednji sliki.



1. Korak: $a \to b$ Temperaturo plina povečamo pri $V = \text{konst}$, tako da dovajamo toploto Q_1. Poveča se pritisk v plinu.
2. Korak: $b \to c$ Povečam temperaturo pri konstantnem tlaku, $p = \text{konst}$. Ker plin opravlja delo pri raztezanju, moram toploto dovajati, da se poveča T in odda delo.
3. Korak: $c \to d$ Znižam temperaturo pri konstantni prostornini. Ker dela ne opravljam, moram toploto odvajati.
4. Korak: $d \to a$ Pri konstantnem pritisku zmanjšam volumen in temperaturo. Sistem oddaja toploto pri nižjih temperaturah.

Značilnost vseh toplotnih strojev je, da prejemajo toploto pri višjih temperaturah in jo oddajajo pri nižjih temperaturah. Toplota prihaja v sistem v korakih 1 in 2, gre iz sistema v korakih 3 in 4.

Celotno delo je negativno: $A = -\oint p\,dV < 0$, ker odda delo pri višjem $-p_{višja}V + p_{nižja}V = V(-p_{višja} + p_{nižja}) < 0$. tlaku in ga prejema pri nižjem tlaku.
Delo opravlja stroj v koraku $b \to c$, prejema pa v koraku $d \to a$.

Toplota, ki jo stroj prejme:

$$Q_{DOV} = Q_1 + Q_2$$

Toplota, ki jo stroj odda: $Q_{ODV} = -|Q_3| - |Q_4|$
Ker je sprememba krožna, je sprememba notranje energije pri tej krožni spremembi enaka 0:

$$\Delta W_{n\,KROŽ} = 0 = A_{KR} + Q_{KR} \Rightarrow -A_{KR} = Q_{KR} > 0$$, ker je $A < 0$ ker delo odda

Pri krožni spremembi stroj odda delo A_{kr}, prejme pa toploto Q_{KR}. ~~Toploten~~ Definiram izkoristek toplotnega stroja pri krožni spremembi:

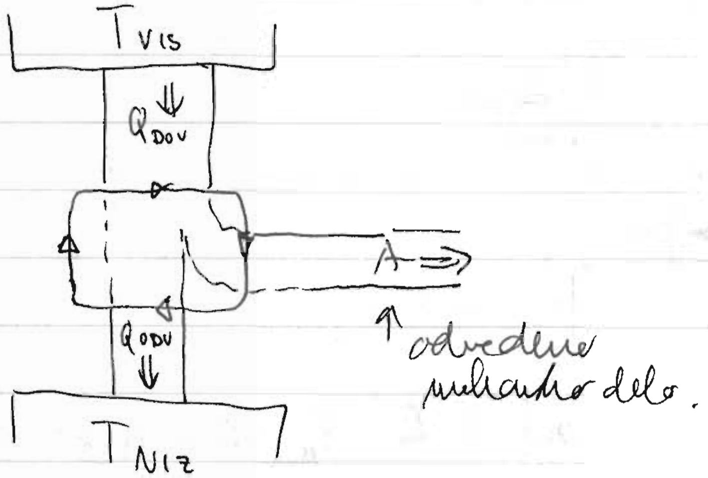
$$\eta = \frac{|A_{KR}|}{Q_{DOV}} = \frac{Q_{KR}}{Q_{DOV}} = \frac{Q_{DOV} - |Q_{ODV}|}{Q_{DOV}} = 1 - \frac{|Q_{ODV}|}{Q_{DOV}}$$

$$\boxed{\eta < 1}$$

Izkoristek toplotnega stroja je vedno manjši od 100%, ker vedno odvede nekaj toplote. To je ena od oblik 2. zakona TD!

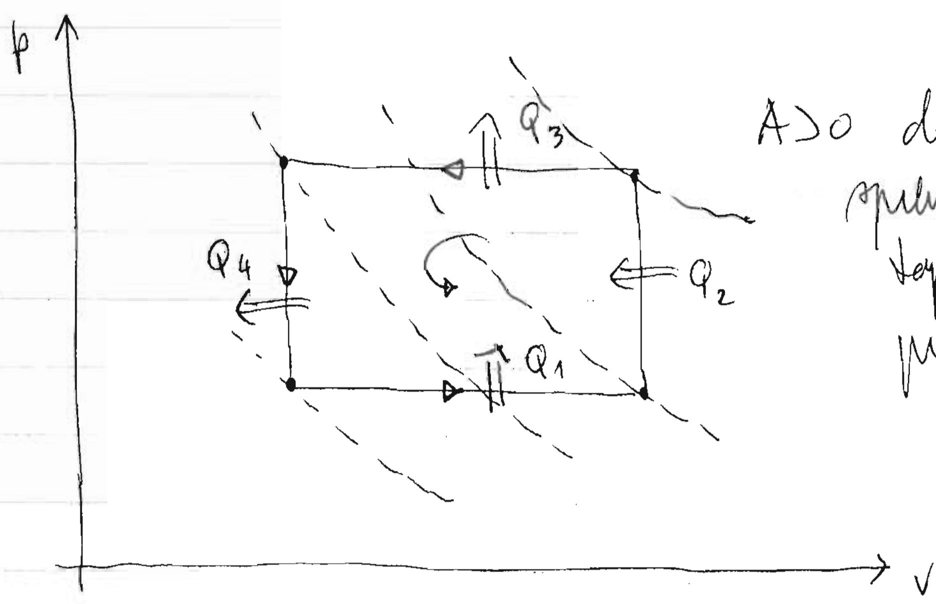
Oblika 2. zakona TD: v krožni spremembi je nemogoče v celoti spremeniti dovedeno toploto v delo, če ni nobenih drugih sprememb v sistemu. zato je izkoristek topl. str. < 1.

Toplotni stroj si torej predstavljamo z naslednjim diagramom:

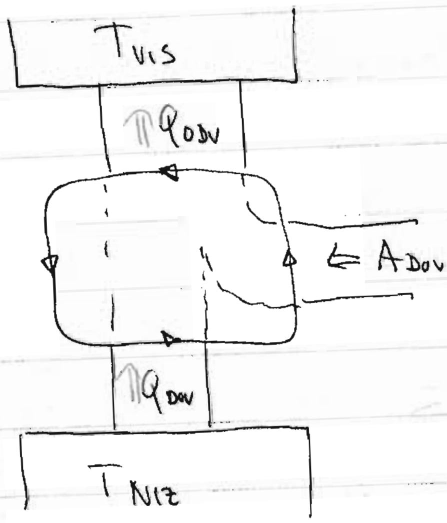


Toplotni stroj vedno dela vezj med dvema temperaturama, T_{VIS}, kjer prejema toploto in T_{NIZ}, kjer oddaja toploto.

Hladilniki so "obrnjeni" toplotni stroji. Prejemajo mehansko energijo in črpajo toploto s hladnejšega dela na toplejši del. (Tam: sama od sebe teče toplota ravno v obratni smeri!) Če izvedemo obratno krožno spremembo, potem se spremeni tudi predznak toplote:



$A > 0$ delo dovajamo, spremeni pa se predznak toplote. Tisto kar smo prej odvajali, sedaj dovajamo in obratno. Toploto jemljemo pri nižji T, kadar hladimo, oddajamo pa pri višji T.



Zopet je pri krožni spremembi: $A \Delta W_{NOT} = 0 = A_{KR} + Q_{KR}$

$$A_{KR} = -Q_{KR} = -\left(|Q_{DOV}| - |Q_{ODV}|\right) = -|Q_{DOV}| + |Q_{ODV}|$$

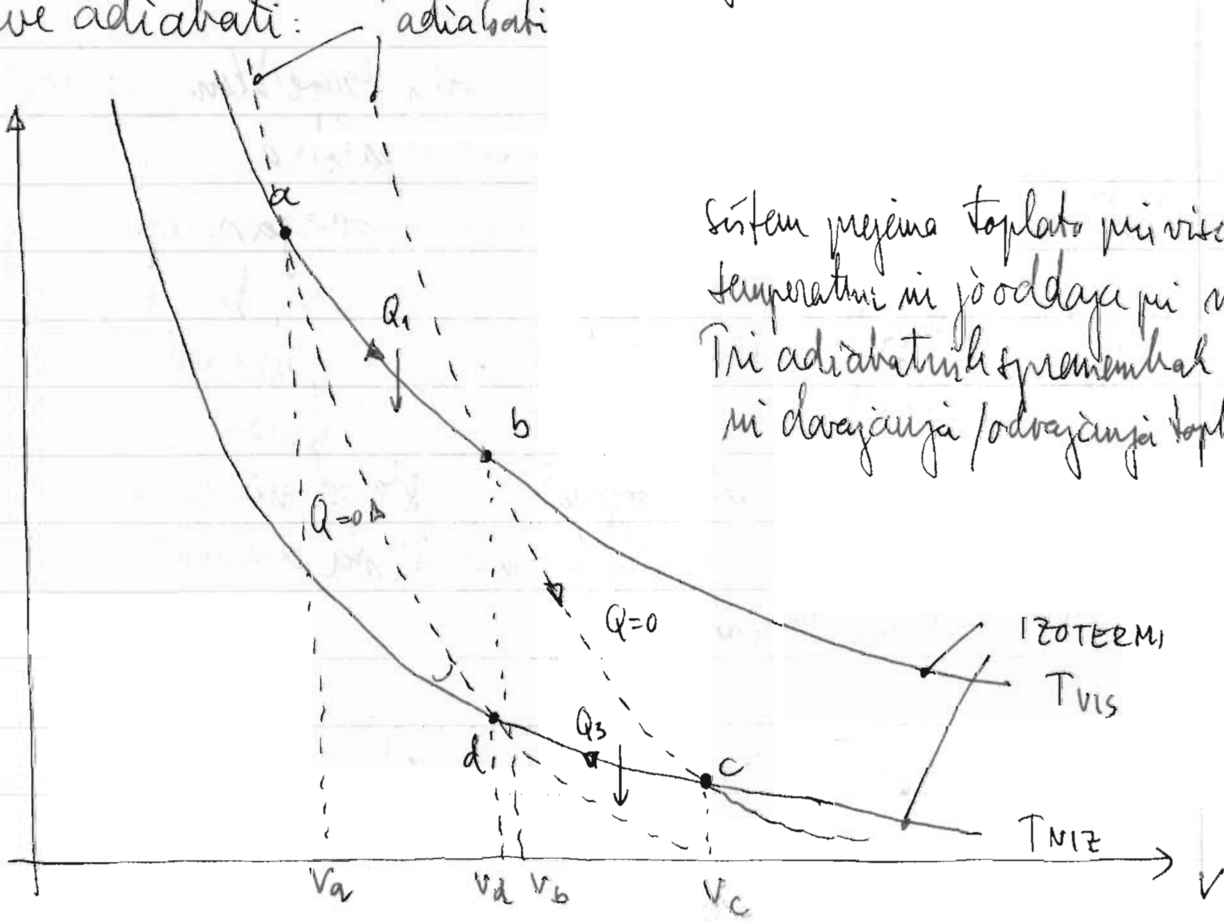
Izkoristek hladilnika:

$$\eta = \frac{Q_{DOV}}{\underset{>0}{A_{KR}}} = \frac{|Q_{DOV}|}{-|Q_{DOV}| + |Q_{ODV}|} = \frac{1}{\frac{|Q_{ODV}|}{|Q_{DOV}|} - 1} \qquad |Q_{ODV}| > |Q_{DOV}|$$

$$\boxed{\eta_{hl} = \frac{1}{\frac{|Q_{ODV}|}{|Q_{DOV}|} - 1}}$$

3.8. Idealni toplotni stroj: Carnot-ova krožna sprememba

Videli smo, da je izkoristek toplotnega stroja vedno manjši od 100%. Postavi se vprašanje, ali je za to kakšen globlji razlog in neka naravna omejitev. Če je takšna omejitev, potem mora biti splošna. Da bi si podrobneje pogledali naravo omejitve toplotnih strojev, bomo izračunali izkoristek toplotnega stroja, ki deluje na principu Carnot-ove krožne spremembe. Videli bomo, da lahko vsako krožno spremembo opišemo z množico zelo majhnih Carnot-ovih sprememb in pridemo do pojma entropije. Carnot-ov stroj ima največji možni izkoristek od strojev, ki delajo med dvema T. Carnot-ovo krožno spremembo sestavljata 2 izotermi in dve adiabati:



Sistem prejema toploto pri visoki temperaturi in jo oddaja pri nizki. Pri adiabatnih spremembah ni dovajanja/odvajanja toplote.

1. korak: plin izotermno razpnemo, torej je v stiku s toplotnim rezervoarjem. $W_n = konst$, toplota dovajamo, odvajamo delo.
2. korak: plin je toplotno izoliran. Plin se širi, T pada, tudi notranja energija. Delo odvajamo.
3. korak: plin izotermno stiskamo pri nižji T. $W_n = konst$, delo prejema, toploto odvajamo
4. korak: adiabatno stiskanje

Korak	Q	A	ΔW_n
1. $T = konst = T_{VIS}$	>0	<0	0
2. $Q=0$	0	<0	<0
3. $T = konst = T_{NIZ}$	<0	>0	0
4. $Q=0$	0	>0	>0

Carnotov stroj prejema toploto pri visoki temperaturi, odvaja pa pri nizki. V celoti je oddano delo negativno.
Poglejmo, kolikšen je izkoristek Carnot-ovega stroja:

$$\eta_{Carnot} = \frac{|A_{vr}|}{|Q_{DOV}|} = 1 - \frac{|Q_{ODV}|}{|Q_{DOV}|}$$

Izračunati moram torej obe toploti. Ti sta od nič različni samo v ciklih 1 in 3, v ciklih 2 in 4 ki sta adiabatna, ne dovajamo nič toplote:

Korak 1: $T_{R} = T_{VIS} = konst: \Delta W_n = 0 \Rightarrow |Q_{DOV}| = |A_1| = mRT_{VIS} \ln\frac{V_b}{V_a}$

Korak 3: $T = T_{NIZ} = konst: \Delta W_n = 0 \quad |Q_{ODV}| = |A_3| = m \cdot R T_{NIZ} \ln\frac{V_c}{V_d}$

$$\frac{Q_{ODV}}{Q_{DOV}} = \frac{M \cdot R \cdot T_{NIZ}}{M \cdot R \cdot T_{VIS}} \cdot \frac{\ln \frac{V_c}{V_d}}{\ln \frac{V_b}{V_a}} = \frac{T_{NIZ}}{T_{VIS}} \cdot \frac{\ln \frac{V_c}{V_d}}{\ln \frac{V_b}{V_a}}$$

Za adiabatne (izentropne) spremembe velja

$$T \cdot V^{\varkappa-1} = konst \quad : \quad T_{VIS} V_b^{\varkappa-1} = T_{NIZ} V_c^{\varkappa-1}$$

$$T_{NIZ} V_d^{\varkappa-1} = T_{VIS} V_a^{\varkappa-1}$$

$$\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\varkappa-1} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d} \Rightarrow \frac{\ln \frac{V_c}{V_d}}{\ln \frac{V_b}{V_a}} = 1$$

Dobimo $\frac{|Q_{ODV}|}{|Q_{DOV}|} = \frac{T_{NIZ}}{T_{VIS}}$ in izkoristek Carnot-ovega stroja je

$$\boxed{\eta_{CARNOT} = 1 - \frac{T_{NIZ}}{T_{VIS}}}$$

Izkoristek Carnot-ovega stroja bi bil 100%, če bi stroj lahko oddajal toploto pri absolutni ničli $T_{NIZ} = 0$.

Da se pokazat, da ima med vsemi stroji, ki delujejo med dvema temperaturama, Carnot-ov stroj tisti z največjim izkoristkom.

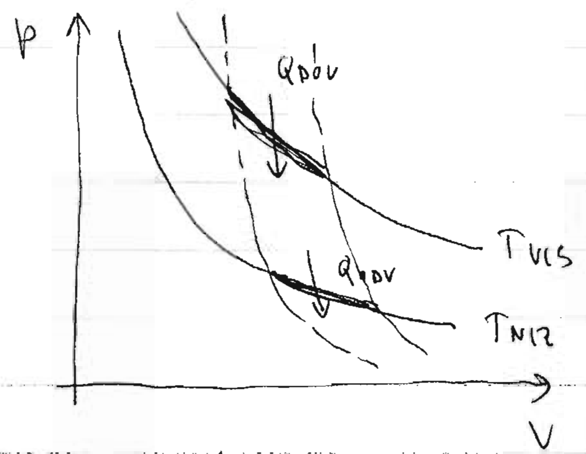
Za Carnot-ov cikel smo dobili izraz:

$$\frac{|Q_{ODV}|}{|Q_{DOV}|} = \frac{T_{NIZ}}{T_{VIS}} \Rightarrow \frac{|Q_{ODV}|}{T_{NIZ}} - \frac{|Q_{DOV}|}{T_{VIS}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{Q_{ODV}}{T_{NIZ}} + \frac{Q_{DOV}}{T_{VIS}} = 0}$$

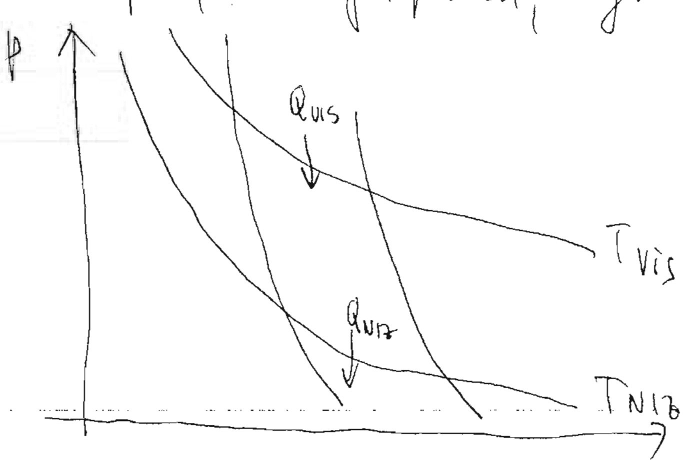
Za Carnotovo spremembo torej velja sveza med količinami $\frac{Q}{T}$ na obeh izotermah (samo tam Q teče v sistem/iz sistema)



To nas bo pripeljalo do količine $\frac{Q}{T}$, ki ima podobno pomembno vlogo kot je energija. Ta količina je entropija oziroma sprememba entropije od ene do druge adiabate

Absolutna temperaturna skala:

Na Carnotovi krožni spremembi lahko definiramo absolutno (Kelvinovo) temperaturno skalo. Carnotov cikel ni vezan na idealni plin, temveč je splošen, torej neodvisen od izbire snovi.



Videli smo, da za Carnotov cikel velja

$$\frac{Q_{vis}}{T_{vis}} + \frac{Q}{T} = 0$$

Vzemimo, da lahko merimo Q_{VIS} in Q, poznamo pa npr. T_{VIS}, ki jo postavimo na trojno točko vode. Potem lahko iz enačbe, ki opisuje razmerje temperatur in toplot izračunamo, pri kakšni temperaturi je toplotni stroj oddal toploto:

$$\boxed{T = T_{VIS} \cdot \frac{Q}{Q_{VIS}}}$$

Definicija Kelvinove (absolutne) skale, $T_{VP} = 273{,}16\ K$ (ledišče vode)

Opazimo da gre $Q \to 0$, če gre $T \to 0$ (t.j. temperatura, pri kateri stroj oddaja toploto). To nam da misliti, da je absolutno ničlo $T = 0$ nemogoče doseči, saj gre tudi toplota Q takrat proti 0. To trdi 3. zakon TD (Nernstov zakon): absolutne ničle ni mogoče doseči v končnem številu korakov)

3.9. Entropija pri reverzibilnih in ireverzibilnih spremembah

Pojem entropije si bomo pogledali pri Carnot-ovi krožni spremembi: dve izotermi in dve adiabati. Še prej si moramo pogledati pojem reverzibilne in ireverzibilne spremembe /pojav/pot v termodinamiki.

Kdaj je določena termodinamska sprememba reverzibilna?

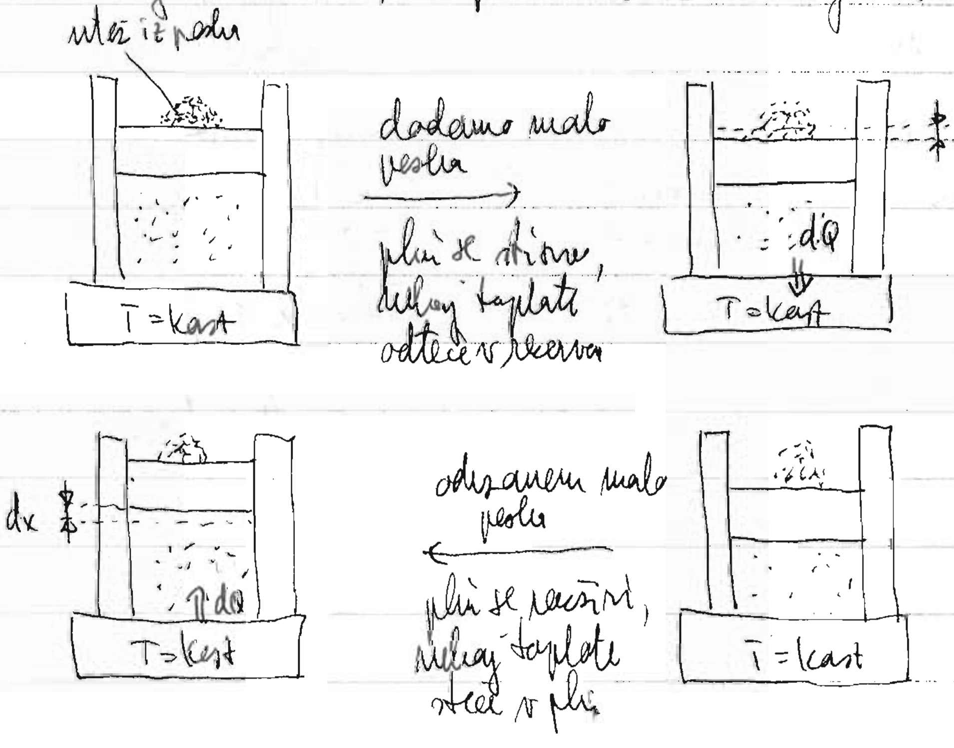
i) sprememba stanja se mora dati obrniti tako da je telo na koncu v istem stanju kot na začetku (v mislih obrnemo smer časa $t \to -t$ in gledamo, ali vidimo obratno sprem.)

ii) obrnjena sprememba se mora izvesti tako, da poteka preko istih vmesnih stanj, hitrosti in tokovi so nasprotni (počasna sprememba)

iii) tako obrnjeno spremembo lahko naredimo pri enakih temperaturah in silah, kot smo naredili prvotno spremembo

Osnovna zahteva: sprem. mora biti počasna in mora potekati preko dobro določenih termod. stabilnih stanj

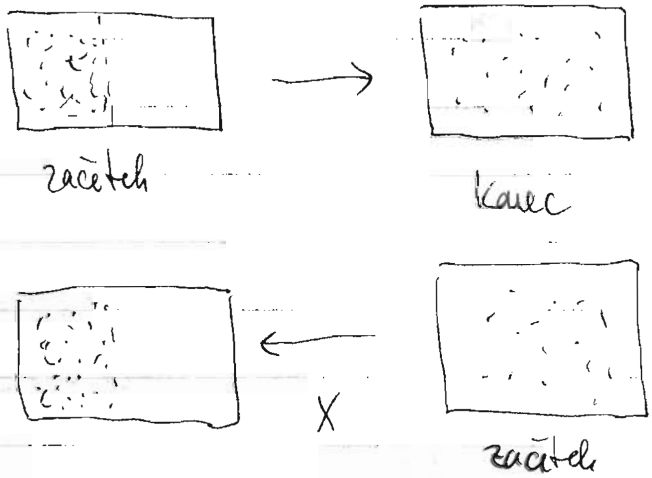
1. Primer: reverzibilno izotermno stiskanje plina v posodi, ki je v stiku s toplotnim rezervoarjem:



To je izotermna reverzibilna sprememba. Mora biti počasna, da sta tlak in V ves čas lepo definirana.

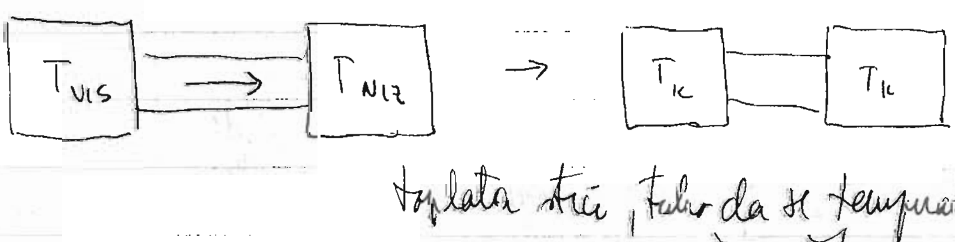
2. Primer: adiabatno reverzibilno stiskanje ali raztezanje plina.

3. Primer: Hitro polnjenje je izrazito ireverzibilna sprememba

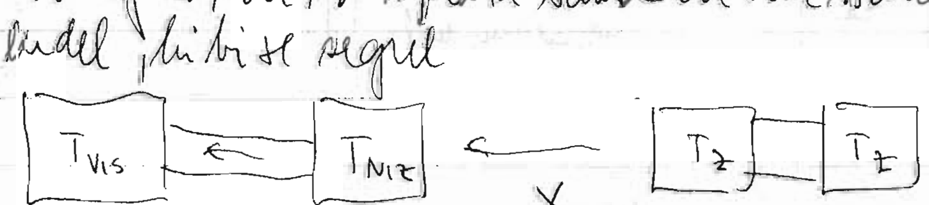


Zelo malo verjetno je, da se bodo molekule plina same od sebe nabrale v levem delu posode! Ta sprememba je torej ireverzibilna!!

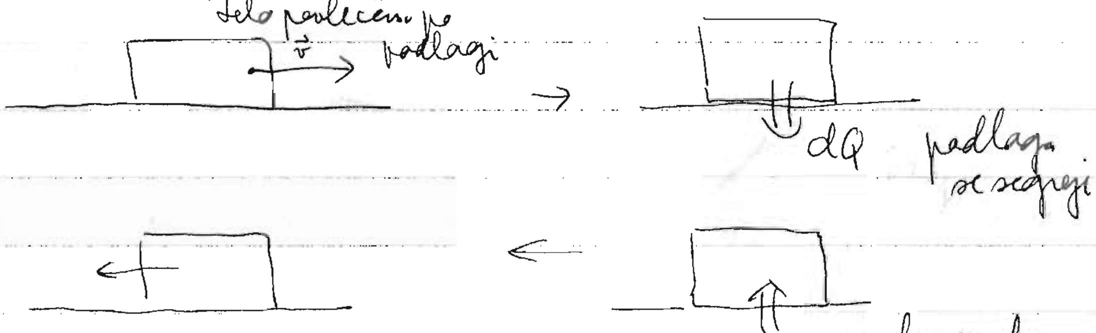
4. Primer: prevajanje toplote s toplejšega na hladnejši mesto.



Ni verjetno, da bo toplota sama od sebe stekla v kader, ki bi se segrel



5. Primer: Trenje je vedno ireverzibilni pojav!



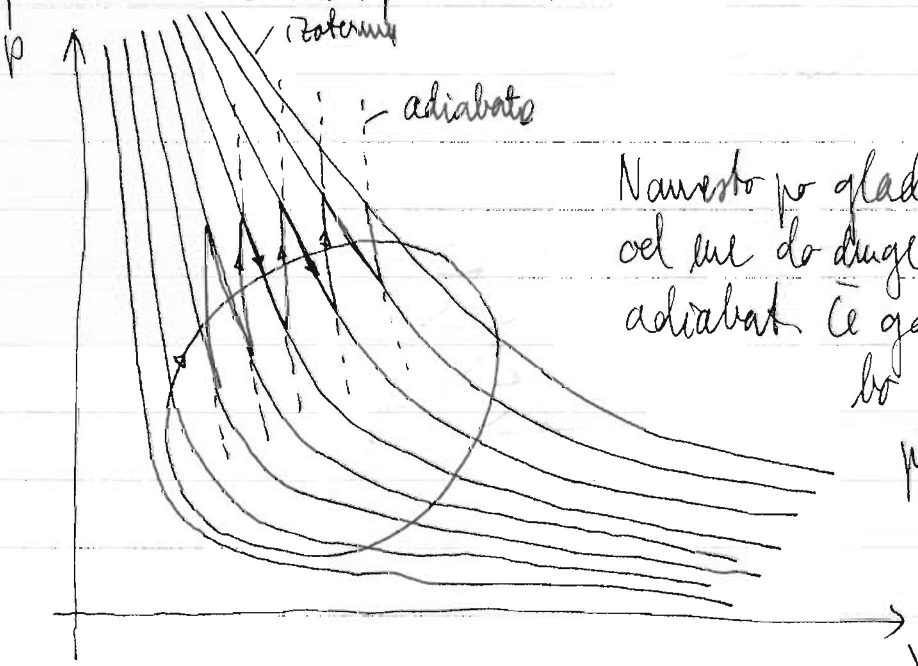
zelo malo verjetno je, da se bo toplota iz podlage spremenila v usmerjeno gibanje klade

6. Primer: raztapljanje črnila v vodi.
7. Primer: človeško življenje

Ugotovili smo, da sta izotermna in adiabatna sprememba v Carnot-ovem ciklu reverzibilni. Za takšne spremembe smo ugotovili, da velja:

$$\frac{Q_{DOV}}{T_{VIS}} + \frac{Q_{ODV}}{T_{NIZ}} = 0$$

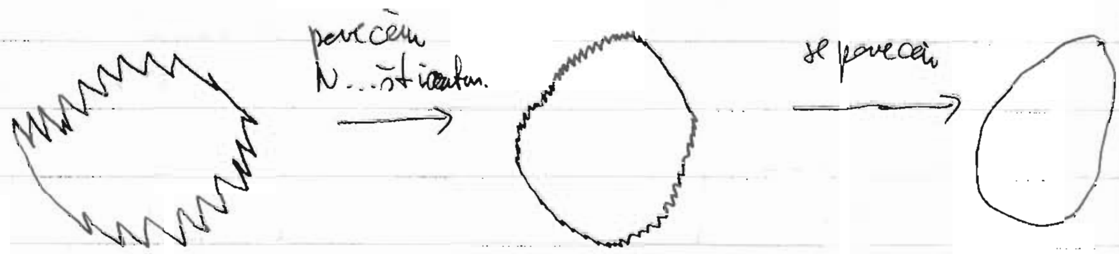
Ali lahko takšno enačbo lahko zapišem za poljubno krožno reverzibilno spremembo? Krožno spremembo narišem v sistem izoterm:



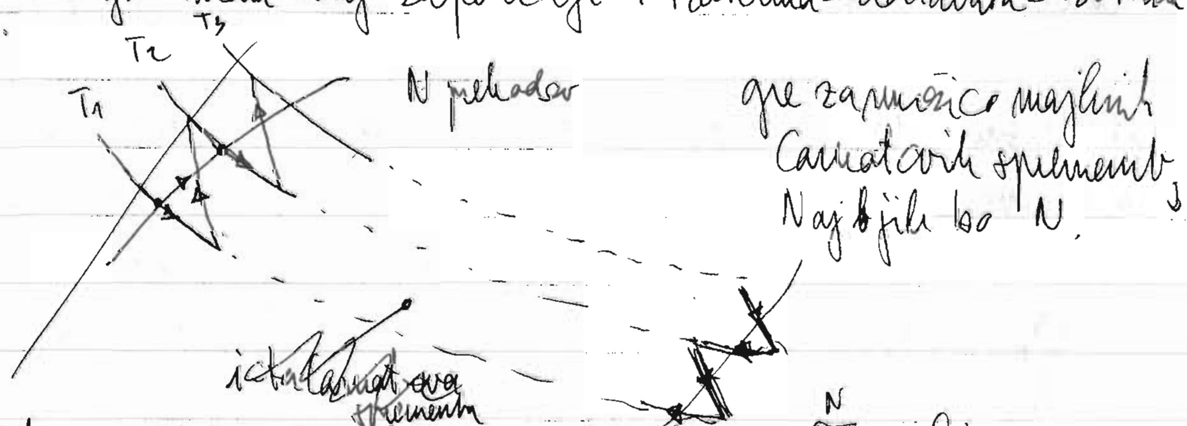
Namesto po gladki krivulji grem od ene do druge izoterme preko adiabat. Če gostim korake, bo ta cik-cak krivulja prešla v gladko krivuljo.

Malo število izoterm in adiabat

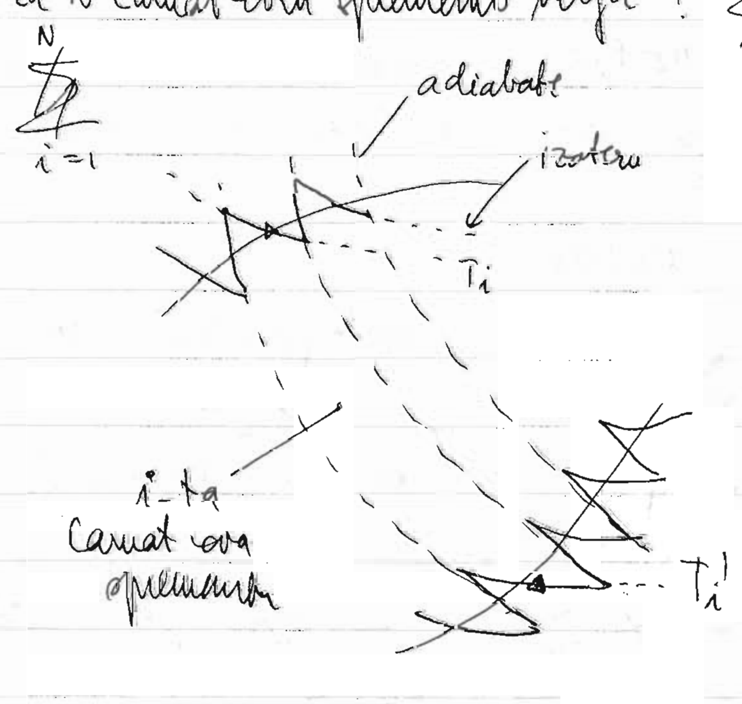
Večje število izoterm in adiabat



V limiti zelo velikega števila adiabat in izoterm dobimo gladko krivuljo. Imam torej zaporedje: izoterma – adiabata – izoterma –



Tako za N Carnot-ovih sprememb velja: $\sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = 0$



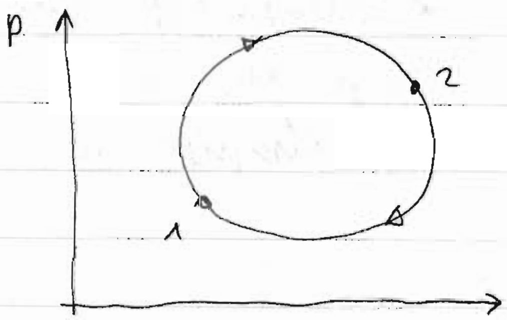
Če število adiabat zgostimo, dobimo v limiti:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta Q_i}{T_i} = \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Dobili smo izraz, ki je za poljubno reverzibilno krožno spremembo enak 0:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \oint \ldots \text{ integral po zaključeni poti}$$

Tak integral po zaključeni poti si mislim narejen tudi ~~iz~~ takole:



$$\oint \frac{dQ}{T} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{po poti 1}} + \underbrace{\int_2^1 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 2}} = 0$$

Če $\underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 1}} + \underbrace{\int_2^1 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 2}} = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 1}} - \underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 2}} = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 1}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{dQ}{T}}_{\text{pot 2}}$

Vidim da je posledica ta, da je po vseh poteh (reverzibilnih) iz točke 1 v točko 2 integral $\int \frac{dQ}{T}$ vedno enak.

Torej je to neka nova količina, katere sprememba je odvisna samo od lege začetnega in končnega stanja, ne pa od izbire reverzibilne poti. To količino imenujemo entropija. Njena sprememba med začetnim in končnim stanjem je

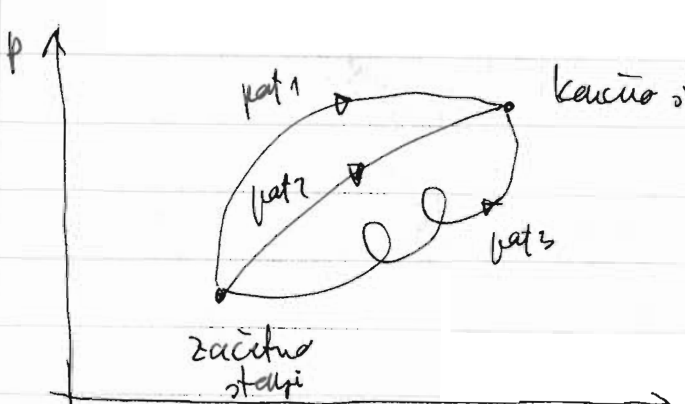
$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}}$$

Sprememba entropije po reverzibilni spremembi iz zač. v končno stanje je enaka integralu $\int \frac{dQ}{T}$

($dS = \frac{dQ}{T}$ diferencial entropije)

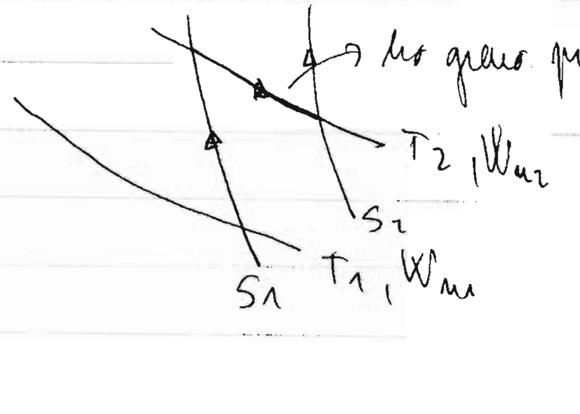
Enota: [J/K], $dS = \frac{dQ}{T}$ diferencial entropije za majhno reverzibilno spremembo

Entropija je torej enolična funkcija stanja: vsako stanje ima eno samo in točno določeno vrednost entropije.



pri vseh reverzibilnih spremembah iz zač. v končno stanje je sprememba entropije enaka za vse poti

Torej: Izoterme: konstantna notranja energija
~~Izo~~adiabate: konstantna entropija



ko gremo pri T = konst od ene izentrope do druge, se spremeni entropija

1. Primer: 1 kg ledu pri 0°C reverzibilno stalimo v 1 kg vode pri isti temperaturi. $q_{tal} = 0.336 \cdot 10^6 \ J \ kg^{-1}$.

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{q_{tal}\, dm}{T} = \frac{q_{tal}}{T} \int_1^2 dm = \frac{q_{tal} \cdot m}{T}$$

$$S_2 - S_1 = \frac{0.336 \cdot 10^6 \ J \ kg^{-1} \cdot 1 kg}{273 K} = \underline{\underline{1.2 \cdot 10^3 \ J/K}}$$

Entropija vode se poveča. Ker je toplota $q_{tal} m$ prišla iz okolice, se za ravno toliko zniža entropija okolice. Skupna sprememba entropije sistema + okolice je pri tej reverzibilni spremembi enaka 0.

2. Zgled: Kolikšna je sprememba entropije pri segrevanju 1 kg vode od 0°C do 100°C? $c_p = 4186 \ J/kgK$.

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m \cdot c_p \cdot dT}{T} = m \cdot c_p \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$S_2 - S_1 = 1 kg \cdot 4186 \ J/kgK \cdot \ln \frac{373 K}{273 K} = \underline{\underline{1300 \ J/K}}$$

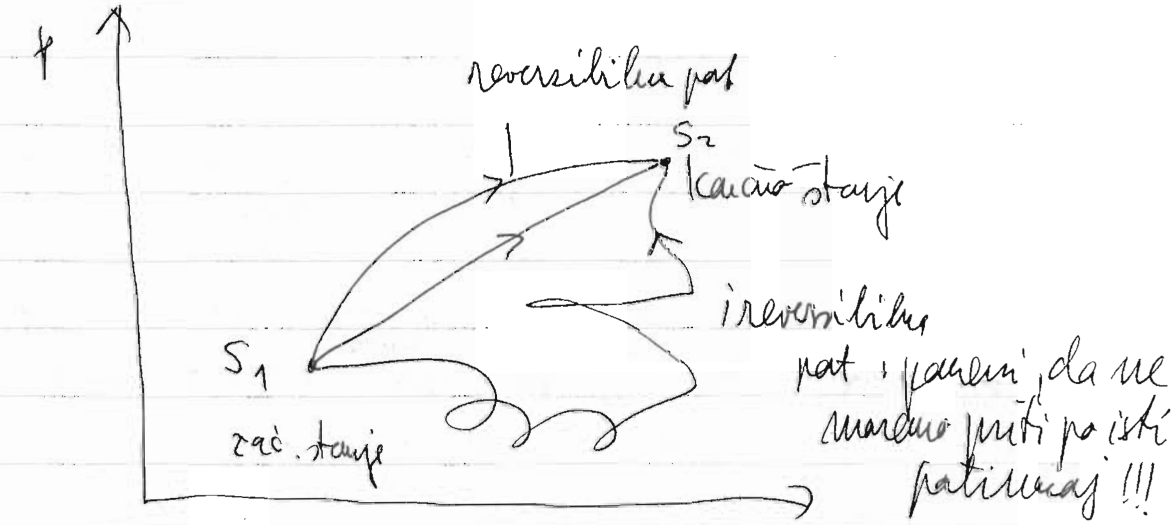
Entropija vode se pri segrevanju poveča, ~~ob~~ entropija okolice pa se zniža, tako da je skupna sprememba entropije enaka 0.

Kako je s spremembo entropije pri ireverzibilni spremembi?

Vzemimo za primer Hirnov poskus, kjer se plin ireverzibilno (tudi hipno, nekontrolirano) razpne v del posode, ki je bil prej prazen. Spremembe entropije ne moremo računati po enačbi, ki velja za reverzibilne spremembe

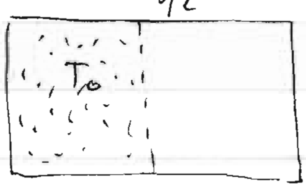
$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$ velja samo za reverzibilne spremembe

Vendar je pomembno naslednje dejstvo: ugotovili smo, da je entropija enolična funkcija stanja, torej ni važno, po kateri poti pridemo iz začetnega v končno stanje. Nekatere poti so reverzibilne, druge ireverzibilne:



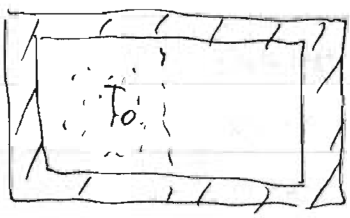
$S_2 - S_1$ je odvisna samo od izbire zač. in končnega stanja, ne pa od tega, po kateri poti (reverzibilni ali ireverzibilni) pridemo iz začetnega v končno stanje.
Če je temu tako, potem si izmislimo pri dani

Ireverzibilni spremembi vzporedno reverzibilno pot.
Pri Hirnovem poskusu imamo na začetku plin, ki recimo zaseda 1/2 volumna:

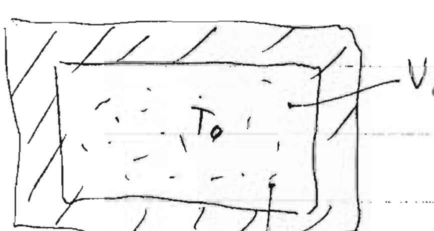


začetno stanje

ireverzibilna pot:
posoda najprej izolirana

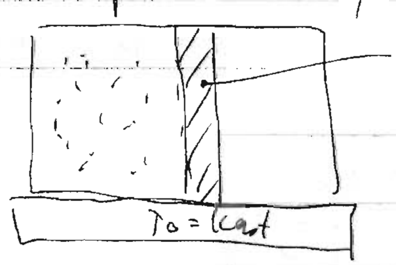


↓ sedaj razbijemo steno

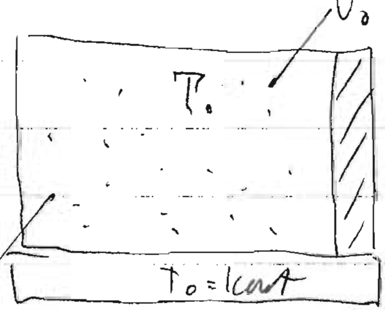


plin ne prejme nič toplote. Njegova temperatura je še vedno T_0. ~~V bistvu~~ se je ~~plin izotermno~~

reverzibilna pot:
posodo dam v stik s topl. rezervoarjem s temperaturo T_0, namesto sten dam bat



↓ bat počasi (reverzibilno) odmikam. Plin se razpenja in pri tem dobiva toplote iz rezervoarja



Končam z isto temperaturo in celotnim volumnom. Stanji plina sta enaki

Stanji plina sta enaki, V_0, T_0 in seveda p_0!

Spremembo entropije torej znam izračunati za nadomestne reverzibilne spremembe, ki vodi preko ravnovesnih stanj.
To je izotermno razpenjanje plina:

$$T = konst \Rightarrow \Delta W_n = 0 \Rightarrow A + Q = 0 \qquad \frac{p}{T} = \frac{m}{M}\cdot\frac{R}{V}$$

$$dQ = -dA = +p\,dV$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{p\cdot dV}{T} = \frac{m}{M} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} R \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

Vidimo, da se je entropija plina povečala $\Delta S > 0$, ker je $\frac{V_2}{V_1} > 1$.
To se je zgodilo, čeprav plin ni prejemal toplote iz okolice, saj je izoliran. Povečanje entropije je zgolj zaradi tega, ker je sprememba ireverzibilna. To dejstvo o povečanju entropije pri ireverzibilnih spremembah združimo v 2. zakon TD, entropijski zakon:

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_{\text{zač. st.}}^{\text{konč. st.}} \frac{dQ}{T}}$$

ireverzibilno

Za reverzibilne spremembe velja enačaj: $S_2 - S_1 = \int_{\text{reverz.}} \frac{dQ}{T}$

Za ireverzibilne spremembe velja ne-enačaj: $S_2 - S_1 > \int \frac{dQ}{T}$

Še eno pomembno stvar opazimo pri Hirnovem poskusu, ki je ireverzibilna sprememba. Ker je plin toplotno izoliran, se entropija okolice ne spremeni. Entropija plina pa se poveča. To je značilno za ireverzibilne spremembe: skupna entropija sistema in okolice se poveča pri ireverzibilnih spremembah in ostaja enaka, če je sprememba reverzibilna. Nikoli pa se ne zgodi, da bi entropija sistema in okolice sama od sebe zmanjšala. V naravi se torej entropija sama od sebe poveča, nikoli pa se sama od sebe ne zmanjša. To pomeni, da se entropija ne ohranja, kot se ohranja energija, temveč lahko nastaja iz nič. Vedno se lahko v celoti poveča, nikoli se ne zmanjša. Drugi zakon TD se tako glasi:

V vsakem termodinamskem procesu, ki poteka med ravnovesnimi stanji se entropija sistema in okolice poveča ali ostaja nespremenjena. Matematično formuliramo entropijski zakon z integralom:

$$S_2 - S_1 \geq \int_{\text{zač. st.}}^{\text{konč. st.}} \frac{dQ}{T}$$

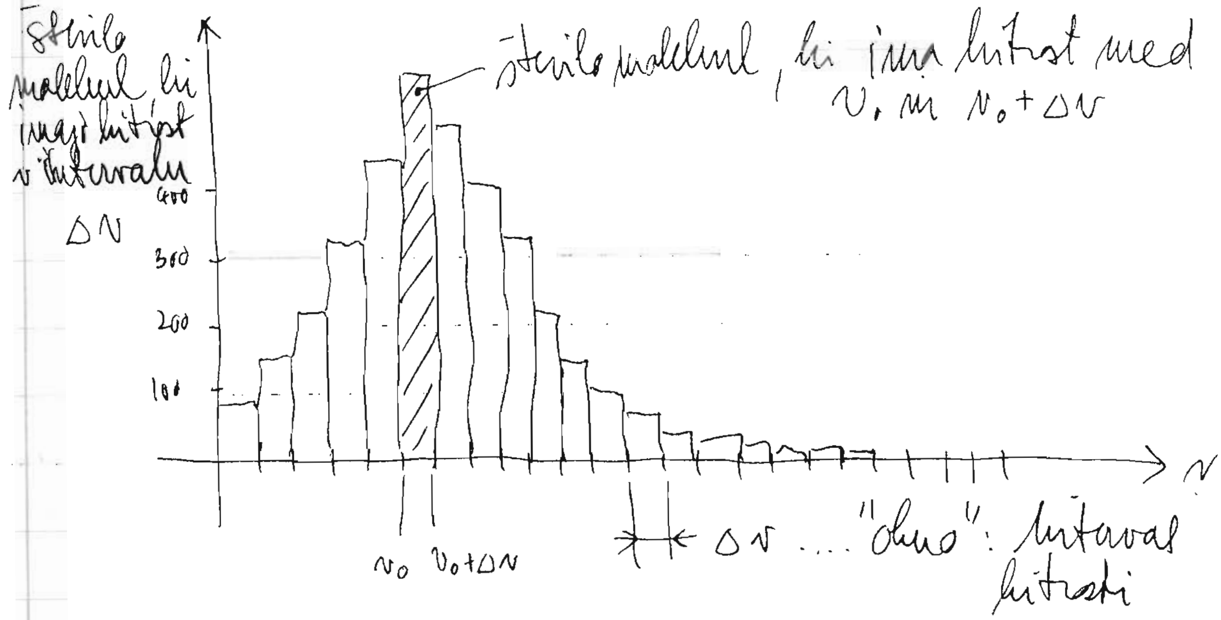
3.10. Osnove statistične mehanike plinov

Osnovni pojem v statistični mehaniki je verjetnostna porazdelitev. Molekule v plinu imajo različne hitrosti, zanima nas, kako naj se lotimo takega problema? Vzemimo določeno število molekul N_0, ki so zaprte v prostoru s stalno prostornino V in stalno temperaturo T. Molekule se gibljejo, zaletavajo, njihove hitrosti se spreminjajo tako po smeri kot po velikosti. Tako pri trkih prenašajo termično energijo na druge molekule. Pri pogledu o notranji energiji smo izvedeli nekaj o povprečnem kvadratu hitrosti molekul, namreč:

$$\frac{1}{2} m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

v ... velikost hitrosti! (ne vključimo smer!)

Ta podatek nam nič ne pove o tem, ali kakšne so hitrosti posameznih molekul. Zelo težko bi bilo tudi slediti molekulam in gledati, kaj se dogaja z njihovimi hitrostmi. Zato se problema lotimo s statistiko: pač gotovo bo precej molekul, ki bodo imele hitrosti blizu $\sqrt{\langle v^2\rangle}$, nekaj bo takih, ki bodo imele večje hitrosti, nekaj pa takih, ki bodo imele nižje hitrosti. Molekul ne morem ločiti, zato si dogovorim, da bom njihove hitrosti obravnaval na naslednji način: recimo da bi imel možnost v danem trenutku določiti, koliko molekul ima hitrost med 100 m/s in 101 m/s, koliko med 101 m/s in 102 m/s in tako naprej in tako nazaj. Za dani trenutek bi lahko naredil histogram hitrosti, t.j. narisal bi število molekul ~~v od~~ v danem hitrostnem intervalu, nato pa narisal za različne hitrosti:



Namesto števila molekul, ki imajo hitrost med v_0 in $v_0+\Delta v$ raje govorimo o deležu molekul:

$$\text{delež} \equiv \frac{\Delta N}{N_0}$$

ΔN .... število molekul, ki imajo hitrost med v_0 in $v_0+\Delta v$

Ta delež molekul je odvisen od hitrosti in od velikosti hitrostnega intervala:

$$\frac{\Delta N}{N_0} = w(v)\cdot\Delta v \quad \text{ali} \quad \Delta N = N_0\, w(v)\cdot\Delta v$$

Običajno je število molekul N_0 zelo veliko, zato da formuliram zgornji izraz v diferencialni obliki:

$$\frac{dN}{N_0} = w(v)\cdot dv \quad \text{ali} \quad \boxed{\frac{1}{N_0}\cdot\frac{dN}{dv} = w(v)}$$

Funkciji $w(v)$ pravimo verjetnostna porazdelitev. Pomeni pa delež molekul ~~xa~~ $\frac{dN}{N_0}$ na hitrostni interval dv pri hitrosti v. Z drugimi besedami si to tolmačimo kot $w(v)$ je verjetnost, da bo imela izbrana molekula hitrost med v in $v+dv$. Odtod ime verjetnostna porazdelitev.
Celotno število molekul mora biti enako N_0:

$$\int_0^{N_0} dN = N_0 = \int_0^{\infty} N_0 \cdot w(v)\, dv = N_0 \cdot \int_0^{\infty} w(v)\, dv$$

Verjetnostna porazdelitev je normirana: $\boxed{\int_0^{\infty} w(v)\, dv = 1}$

To pomeni, da je seštevek vseh verjetnosti, da bom molekulo našel v intervalu od 0 do ∞ enak 1.

Kako iz dane verjetnostne porazdelitve računam povprečja hitrosti in ostalih količin?

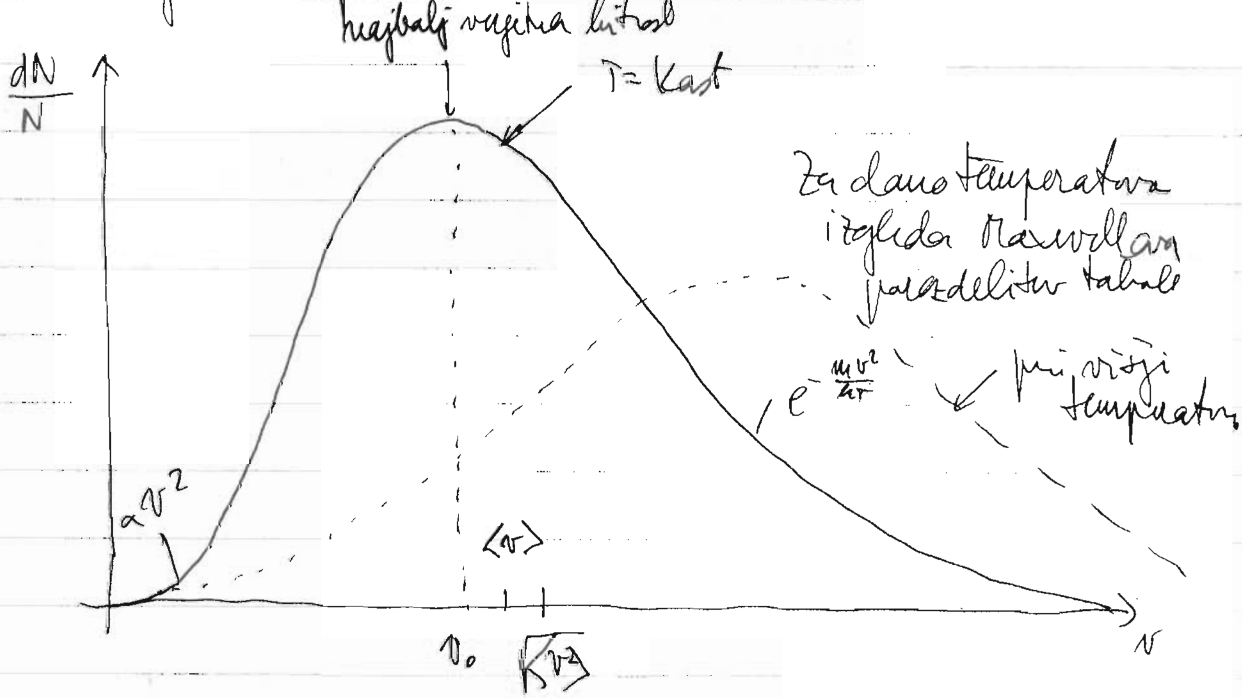
$$\langle v \rangle = \frac{1}{N_0} \cdot \int_0^{\infty} \underbrace{w(v) \cdot dv \cdot N_0}_{dN} \cdot v = \int_0^{\infty} v \cdot w(v)\, dv$$

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \cdot \int_0^{\infty} w(v) \cdot dv \cdot N_0 \cdot v^2 = \int_0^{\infty} v^2 \cdot w(v)\, dv$$

Vprašanje je, kakšna je porazdelitev velikosti hitrosti $w(v)$ pri idealnem plinu. Izračun je pretežak, ga je pa prvi naredil Maxwell. Odtod tudi ime Maxwellova porazdelitev velikosti hitrosti molekul v plinu:

$$\boxed{w(v) = 4\pi \cdot N_0 \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$

Kako izgleda ta porazdelitev?

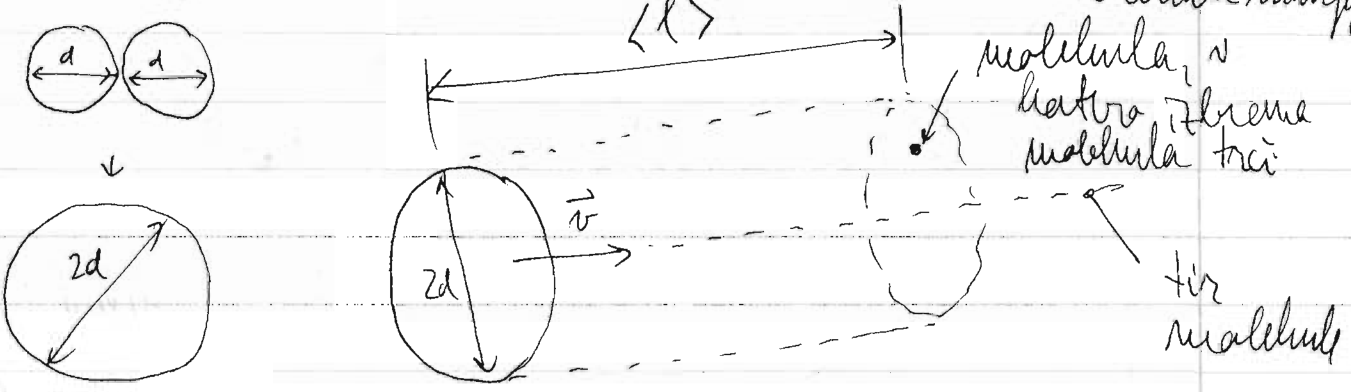


Trki molekul v plinu:

Trki med posameznimi molekulami v plinu so zelo pomemben mehanizem, s katerim pojasnimo makroskopski pojav v plinih. Če bi bile molekule točkasta telesa, trkov sploh ne bi bilo. Ker pa imajo končne razsežnosti, prihaja do trkov. Trkov je veliko, če je plin gostejši, ker je večja verjetnost za trk in jih je malo v razredčenem plinu.

Zanima nas, kolikšno povprečno pot preleti atom ali molekula plina, preden doživi trk. Povprečno pot označimo z $\langle l \rangle$ in jo bomo izračunali približno, da ocenimo velikostni red (ali je reda velikosti molekul, 1 m, 1 km?). Takšne ocene so zelo dobre za to, da dobimo "občutek" za razmere, ki veljajo v plinu.

Vzemimo da so molekule kroglice s premerom d. Trk se bo zgodil, če se bosta težišči molekul približali do razdalje, ki je manjša od d. Ekvivalentni opis trkov dobimo, če si izberemo eno molekulo plina in njen premer povečamo na $2d$, vse ostale molekule pa si predstavljamo kot točkasta telesa. Tudi rečemo, da ostale molekule mirujejo



Vzemimo, da se izbrana molekula giblje po tiru s hitrostjo v. Potem, ko molekula preleti razdaljo $\langle l \rangle$ doživi trk s prvo molekulo. To pomeni, da je na svoji poti srečala eno molekulo. To pomeni, da je v volumnu $V_0 = \pi d^2 \cdot \langle l \rangle$ natančno ena molekula!

Velja $\rho_n \cdot V_0 = 1$ ρ_n .... gostota molekul (št./V)

$$\rho_n \pi d^2 \langle l \rangle = 1$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\pi d^2 \rho_n}$$

V resnici bi morali upoštevati, da se tudi ostale molekule gibljejo, kar skrajša $\langle l \rangle$, tako da je pravilni izraz

$$\boxed{\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 \rho_n}}$$

$\langle l \rangle$ .... povprečna prosta pot (povprečna razdalja, ki jo preleti molekula med dvema trkoma)

Zanima nas, kolikšna je ta razdalja, še več, poglejmo kolikšne so nasploh razdalje med molekulami plina pri običajnih tlakih.
Izhajamo iz plinske enačbe:

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T = \underbrace{n \cdot N_A}_{\text{„število molekul"}} \cdot k_B \cdot T = N \cdot k_B \cdot T$$

$$\rho_n = \frac{N}{V} = \frac{p}{k_B \cdot T}$$ gostota plina (število molekul /V)

Vzamemo: $p = 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{N}\,\text{m}^{-2}$, $T = 273\,\text{K}$, $k_B = 1.38\cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$

$$\rho_n = \frac{N}{V} = \frac{10^5\,\text{N}\,\text{m}^{-2}\cdot \cancel{\text{K}}}{1.38\cdot 10^{-23}\,\underset{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{J}}\cdot 273\,\text{K}} = \frac{10^{28}}{273\cdot 1.38}\,\text{m}^{-3} = \underline{\underline{2.7\cdot 10^{25}\,\text{m}^{-3}}}$$

Na vsak m^3 plina imamo torej $2.7\cdot 10^{25}$ molekul!! $\boxed{\text{Radij molekule } r \sim 0.1\,\text{nm}}$

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot(0.2\cdot 10^{-9}\,\cancel{\text{m}})^2\cdot 2.7\cdot 10^{25}}\,\text{m}^{\cancel{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 0.04\cdot 2.7}\cdot 10^{-7}\,\text{m} =$$

$$= 2\cdot 10^{-7}\,\text{m} = \underline{\underline{0{,}2\,\mu\text{m}}}$$

Povprečna prosta pot je torej mikroskopsko majhna, pod 1 mikron (1 premer človeškega las je $\sim 60\,\mu\text{m}$).
Kolikšne pa so razdalje med molekulami v plinu?

$$\rho_n = \frac{N}{V} = \frac{1}{V_0}$$ V_0 .... volumen, ki ga zaseda 1 molekula

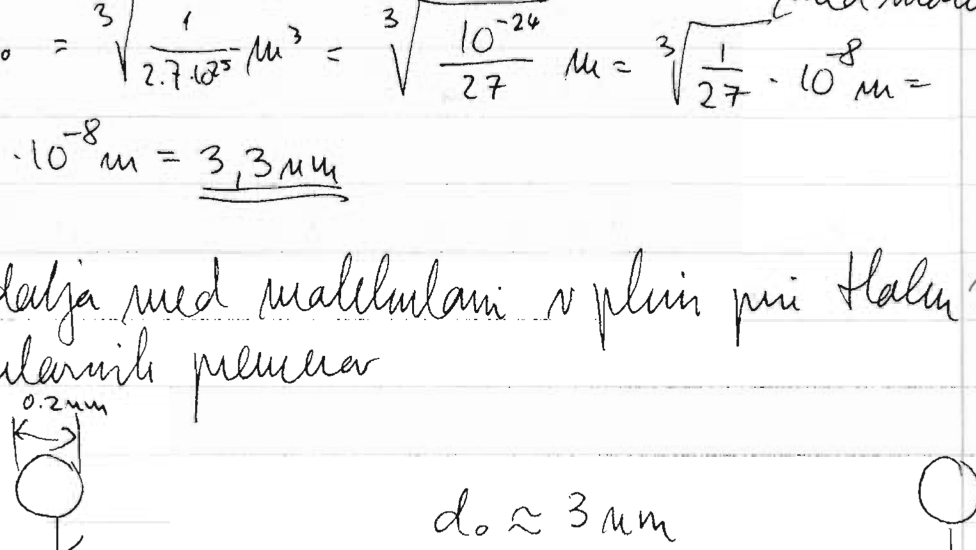
$$V_0 = \frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{2.7\cdot 10^{25}}\,\text{m}^3 = \frac{(10^9\,\text{nm})^3}{2.7\cdot 10^{25}} = \frac{10^{27}\,\text{nm}^3}{2.7\cdot 10^{25}} = \frac{100}{2.7}\,\text{nm}^3 \approx 37\,\text{nm}^3$$

d ... neka povprečna razdalja med molekulami

$$d_0 = \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{\frac{1}{2.7\cdot 10^{25}}\,\text{m}^3} = \sqrt[3]{\frac{10^{-24}}{27}}\,\text{m} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}\cdot 10^{-8}\,\text{m} =$$

$$= 0{,}33\cdot 10^{-8}\,\text{m} = \underline{\underline{3{,}3\,\text{nm}}}$$

Povprečna razdalja med molekulami v plinu pri tlaku 1 bar je ~ 10 molekularnih premerov



Povprečna prosta pot je precej daljša, 100x večja.

Kolikšen pa je povprečen čas med trki? Molekule imajo hitrosti, ki so reda $100 m/s = \langle v \rangle$.

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle \cdot \tau \Rightarrow \tau = \frac{\langle l \rangle}{\langle v \rangle} = \frac{0.2 \cdot 10^{-6} m}{10^2 m s^{-1}} = 0.2 \cdot 10^{-8} s = \underline{\underline{2 \cdot 10^{-9} s}}$$

Zelo kratki časi so med trki, reda 1ns!!

Kaj bi plin primerjali s kapljevino, kolikšne pa so povprečne razdalje med molekulami v kapljevini?
Vzamemo $1 dm^3$ vode, v katerem je 1kg snovi. Število molekul v 1 kg vode je

$$N = N_A \cdot \frac{m}{M} = \frac{1000g}{18g} 6 \cdot 10^{23} = 5{,}5 \cdot 10^{24} \text{ delcev}$$

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{V_0} \qquad V_0 \ldots \text{ volumen, ki ga zaseda ena molekula}$$

$$V_0 = \frac{V}{N} = \frac{1 dm^3}{5{,}5 \cdot 10^{24}} = \frac{10^{-3} m^3}{5{,}5 \cdot 10^{24}} = 1{,}8 \cdot 10^{-28} m^3 = \underline{\underline{0{,}18 nm^3}}$$

Volumen je torej precej manjši, ocenimo še povprečno razdaljo med molekulami v vodi:

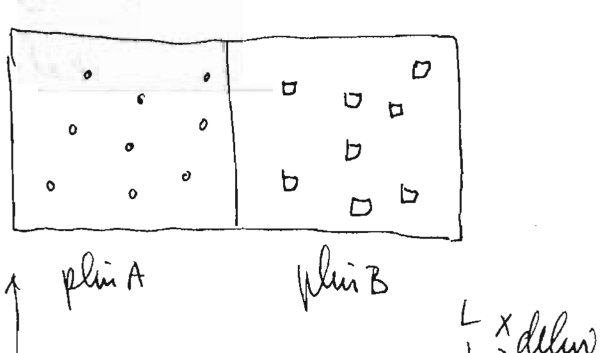
$$d_0 \approx \sqrt[3]{V_0} = \sqrt[3]{0.18} \; nm = \underline{\underline{0{,}6 nm}}$$

Razdalje med molekulami v kapljevini so torej precej manjše, molekule so tesno skupaj.

Difuzija v plinih in kapljevinah

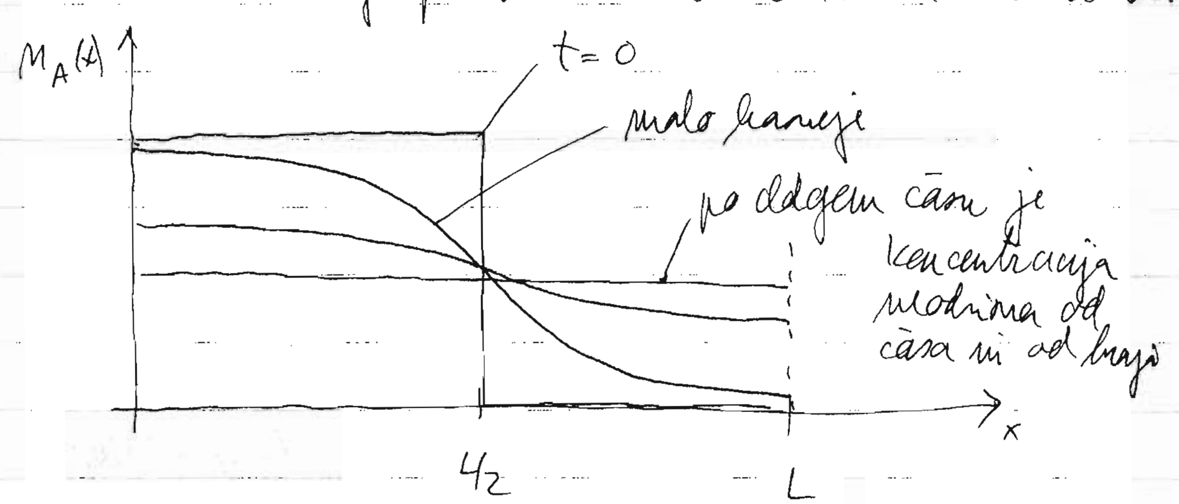
Poskus: v vodo kanemo kapljico črnila. Črnilo se začne samo od sebe širiti po celotnem volumnu vode. Torej se začnejo delci črnila gibati, torej imajo kinetično energijo. Od kod jo dobijo? Dobijo jo od trkov z molekulami vode, ki imajo termično energijo. Ker je črnilo termalizirano, tudi delci črnila imajo termično energijo in se gibljejo. Omenjen pojav imenujemo Brownovo gibanje. Soroden pojav je difuzija molekul in atomov in je posledica neurejenega, termičnega gibanja molekul v plinu ali kapljevini.

Zamislimo si poskus, v katerem imamo na začetku v predeljeni posodi dva plina. Ko vmesno pregrado odstranimo, se plina sama od sebe zmešata, saj se zaradi termičnega gibanja molekul plina obe vrsti molekul razležeta po celotnem volumnu.

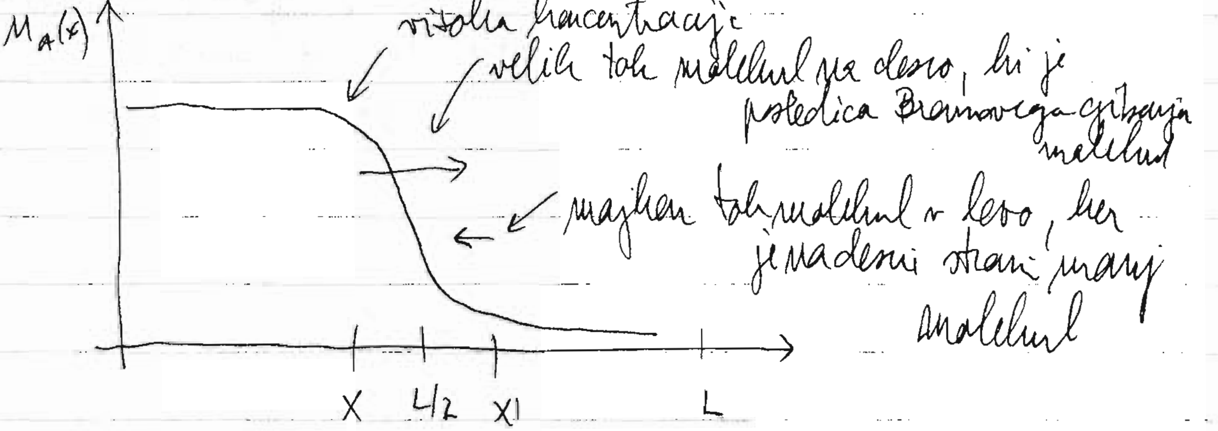


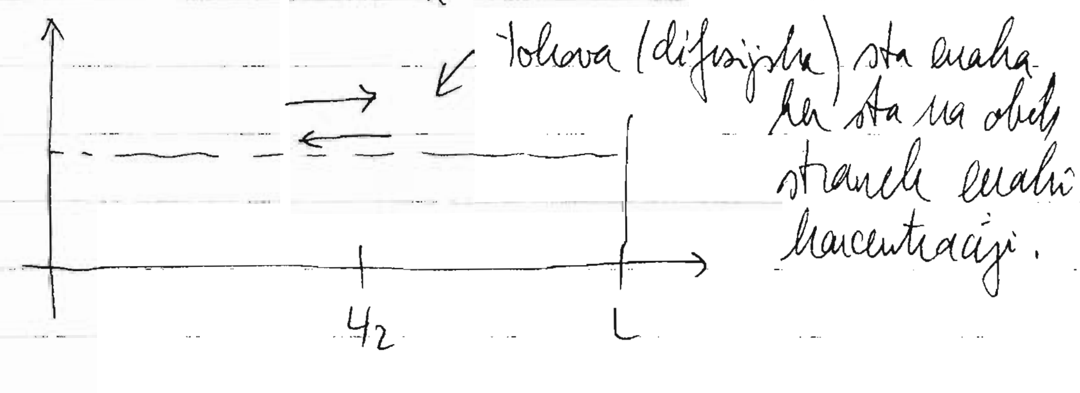
V hipu, ko pregrado odstranimo, sta koncentraciji plinov neravnovesni in se začneta spreminjati.

Označimo koncentracijo plina A v odvisnosti od koordinate x:



Očitno imamo opravka z neto tokom plinov A in B, saj se del plina "preseli" iz leve polovice v desno in obratno. Očitno je, da je neto tok (ali tok delcev) odvisen od tega, kako se koncentracija molekul spreminja s krajem, $n_A(x)$





Označimo si dve mesti x in x' in poskusimo oceniti, kolikšen je termični tok molekul na eno in drugo stran. Vzeli bomo enostaven približek, da se 1/3 molekul v povprečju giblje vzdolž osi x, 1/3 vzdolž osi y in 1/3 vzdolž osi z.

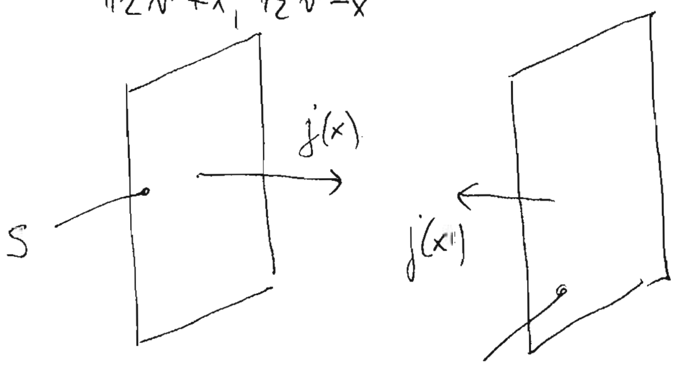
koliko se jih giblje vzdolž osi x

tok

$$\Delta N = \frac{1}{3}\cdot\frac{N_0}{V}\cdot\frac{1}{2}\cdot S\cdot\langle v_x\rangle\cdot\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t\cdot S} = j$$

gostota toka molekul

1/2 v +x, 1/2 v −x



mesto x

$n_A(x)$

mesto x'

$n_A(x')$

$$j = \frac{1}{6}\cdot\frac{N}{V}\cdot\langle v_x\rangle = \frac{1}{6}\, n\cdot\langle v_x\rangle$$

$j = j(x)$, ker $n = n(x)$

$$j(x) = \frac{1}{6}\, n(x)\langle v_x\rangle \qquad j(x') = -\frac{1}{6}\, n(x')\langle v_x\rangle$$

Razlika tokov:
(skupni tok)

$$j(x) - j(x') = \frac{1}{6}\langle v_x\rangle\cdot\overbrace{\left(n_A(x) - n_A(x')\right)}^{\Delta n} =$$

$$= \frac{1}{6}\langle v_x\rangle\cdot\frac{\Delta n_A(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x = \frac{1}{6}\langle v_x\rangle\cdot\frac{dn_A}{dx}\cdot\Delta x$$

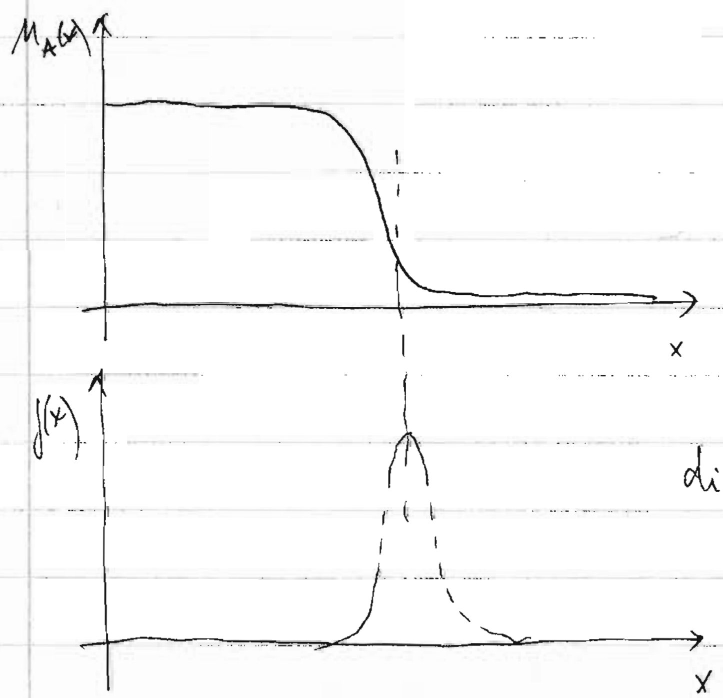
$$\text{"} -\frac{dn_A}{dx}$$

Kolikšen pa je Δx?
Δx je reda velikosti povprečne poti $\langle l\rangle$

$$j(x) = -\frac{1}{6}\langle v_x\rangle \cdot \langle l\rangle \cdot \frac{dn_A}{dx} = -D \cdot \frac{dn_A}{dx}$$

$D = \frac{1}{6}\langle v_x\rangle \cdot \langle l\rangle$ difuzijski koeficient $[m^2 s^{-1}]$
merilo za difuzijski tok.

$$\boxed{j(x) = -D\frac{dn_A}{dx}}$$ difuzijska enačba za difuzijski tok

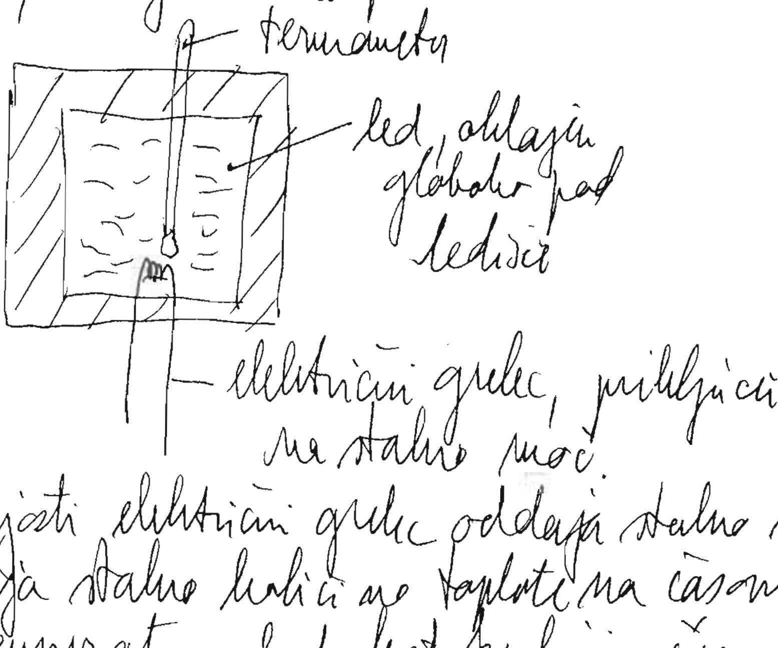


difuzija je najbolj močna tam, kjer se spreminja najbolj koncentracija.

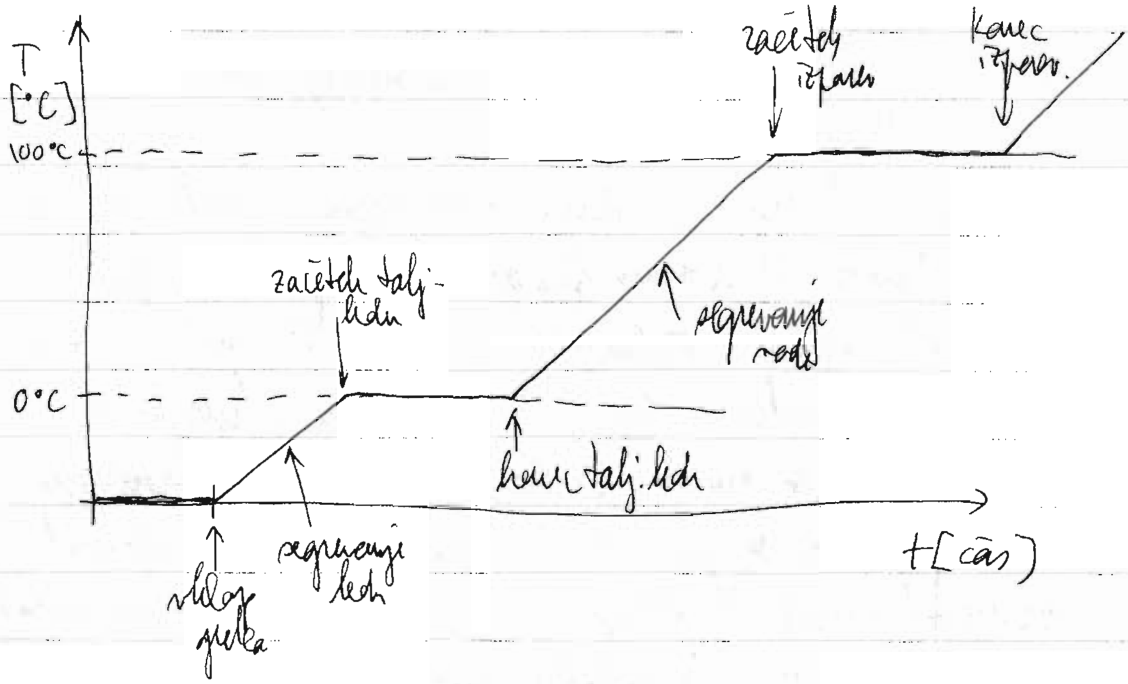
3.11. Fazne spremembe, Clausius-Clapeyronova enačba

Določena snov v naravi obstaja v različnih strukturnih oblikah ali fazah. Med temi fazami snov prehaja pri spreminjanju osnovnih TD spremenljivk, kot so temperatura, tlak ali volumen. Točko v (p, V, T) diagramu, kjer snov preide iz ene faze v drugo, imenujemo točka faznega prehoda. Pri prehodu se v snovi bodisi spremeni gostota (npr. vrenje tekočine), bodisi urejenost snovi (taljenje kristala v neurejeno tekočino); feroelektričnost, feromagnetizem, superprevodnost).

Najbolj preprost primer je taljenje in kasneje izparevanje vode. V toplotno izoliran sistem damo kos ledu, ohlajen daleč pod tališčem.



V notranjosti električni grelec oddaja stalno moč, torej dovaja stalno količino toplote na časovno enoto. Merimo temperaturo ledu kot funkcijo časa.



a) po vklopu grelca se začne temp. ledu linearno večati s časom,

$$dQ_{dov} = m \cdot c_p \cdot dT$$

b) ko led doseže T tališča, se začne taliti, vendar ostane temperatura konstantna. Količina dovod. toplote, ki je potrebna za taljenje določene količine snovi je

$$dQ_{tal} = q_{tal} \cdot dm$$

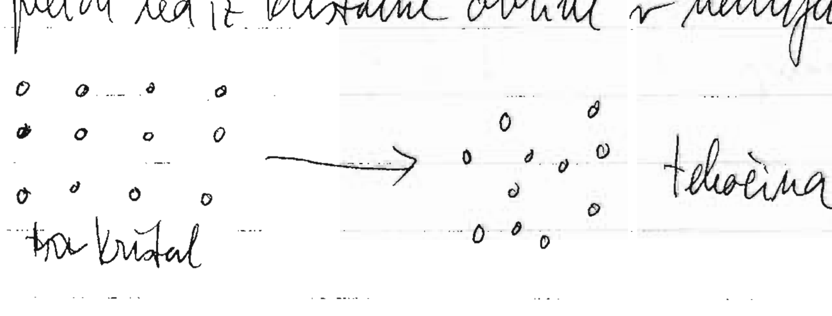
c) Ko je ves led staljen, se začne voda segrevati

$$dQ_{dov} = m \cdot c_p \cdot dT$$

d) Na vrelišču ostane temperatura vode konstantna, začne izparevati:

$$dQ_{izp} = q_{izp} \cdot dm$$

Pri taljenju preide led iz kristalne oblike v neurejeno tekočino



Pri taljenju se poveča notranja energija sistema

$$dW_n = dQ_{tal} - p\,dV$$

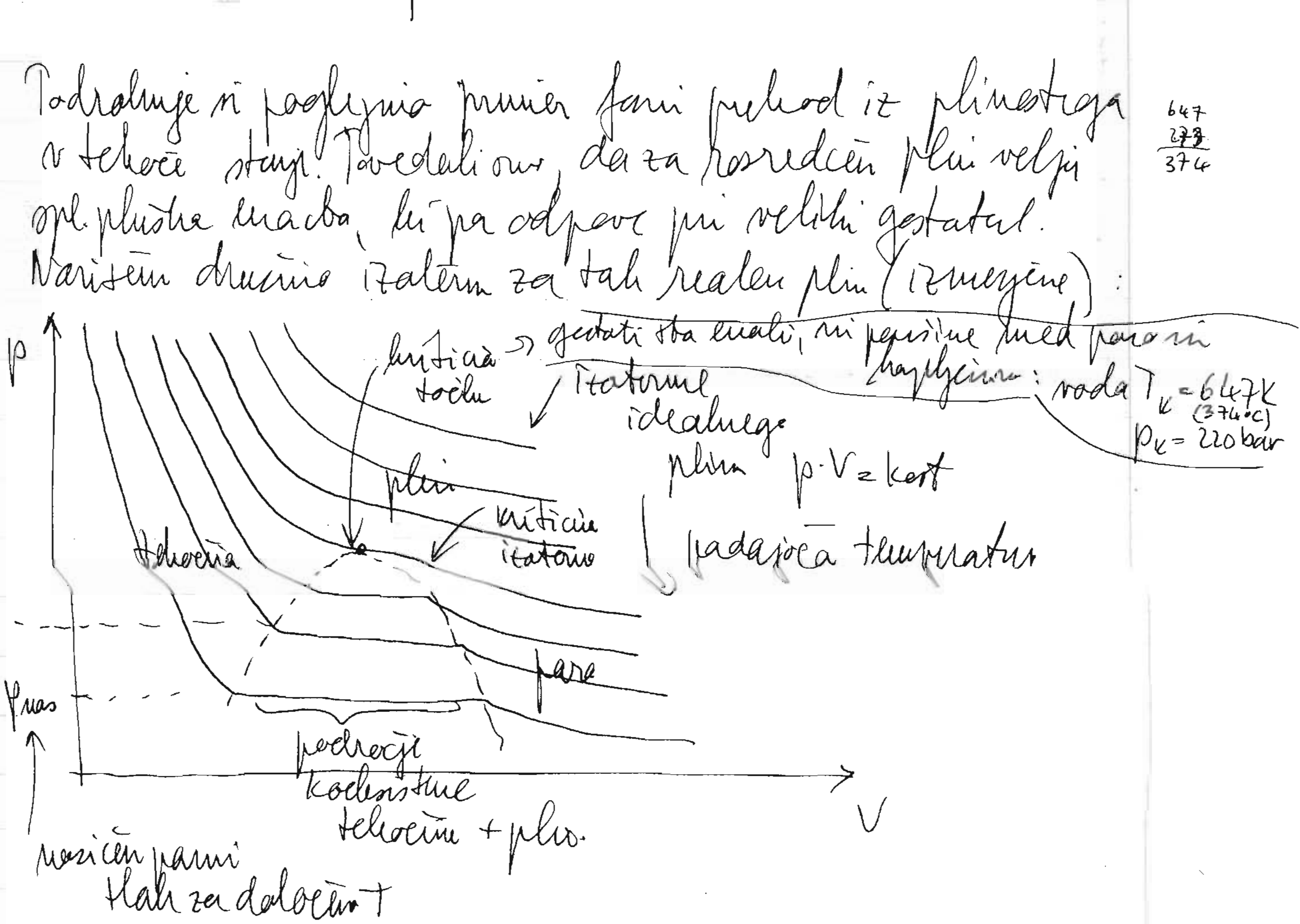
$dQ_{tal} = dW_n + p\,dV = dH$
entalpija se poveča za dovedeno toploto (latentna toplota)

Poveča se tudi entropija sistema:

$$dS = \frac{dQ_{tal}}{T}$$

Podrobneje si poglejmo primer fazni prehod iz plinastega v tekoče stanje. Povedali smo, da za razredčen plin velja spl. plinska enačba, ki pa odpove pri velikih gostotah. Narišem družino izoterm za tak realen plin (izmerjene):

647
$\underline{273}$
374

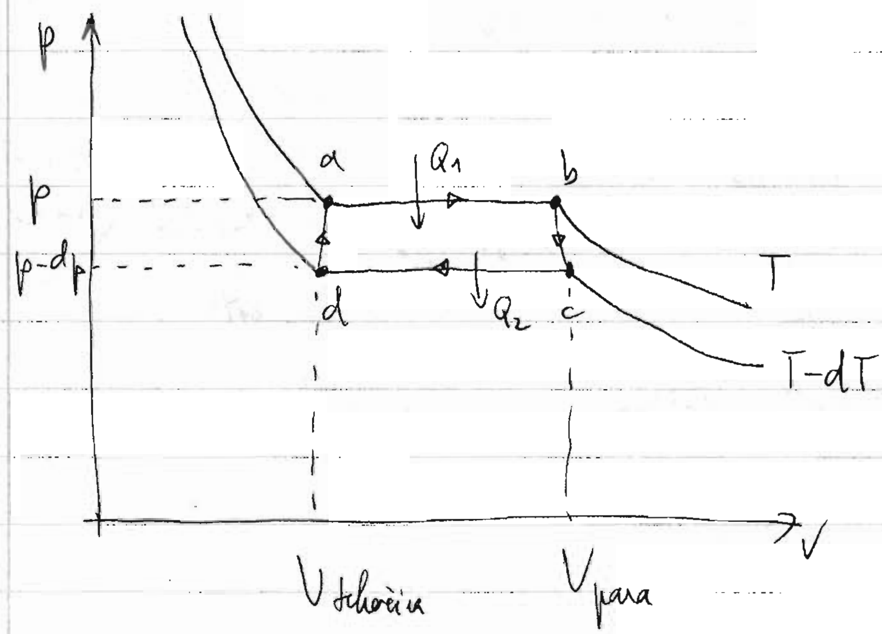


Očitno nasičeni parni tlak narašča z naraščajočo T. Lahko tudi rečemo, da je vrelišče tekočine višje, če je tlak tekočine višji.

Odvisnost nasičenega parnega tlaka od temperature opisuje Clausius Clapeyronova enačba.

$p_n(T)$ ali $T_{vre}(p)$ obrnjena veza.

Mislimo si namišljeno Carnotovo spremembo, ki jo izvedemo z vodo in vodno paro kot medijem. Sprememba poteka med dvema izotermama, ki sta zelo blizu skupaj in dvema adiabatama v področju koeksistence vodne pare in vode:



a→b : tekočina izpari, prejeta toplota : $Q_1 = m \cdot q_{izp}$

oddano delo : $A = -p(V_{par} - V_{tek})$

b→c : izentropna sprememba. $Q = 0$; tudi delo je zanemarljivo, saj se volumen nič ne spremeni

c→d : izotermno in izobarno utekočinjenje. Odd. topl $Q_2 = -m \cdot q'_{izp}$ sproščena izparilna toplota

Prejeto delo : $A = (p-dp)(V_{par} - V_{tek})$

d→a : izentropna sprememba, $Q = 0$, $A = 0$.

V celotnem ciklu smo vložili delo:

$$dA = -p(V_{par} - V_{teh}) + (p - dp)(V_{par} - V_{teh}) = -dp\,(V_{par} - V_{teh})$$

V krožnem ciklu je $dW_n = 0 \Rightarrow dA + dQ = 0$

$$-dp \cdot (V_{par} - V_{teh}) + m\underbrace{(q_{izp} - q_{izp}')}_{\text{razlika izpar. toplot}} = 0$$

Ker je Carnotova sprem. reverzibilna, je sprememba entropije enaka 0:

$$\Delta S_1 = +\frac{m \cdot q_{izp}}{T}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{m \cdot q_{izp}'}{T - dT}$$

$$\frac{m \cdot q_{izp}}{T} - \frac{m \cdot q_{izp}'}{T - dT} = 0$$

$$\frac{m \cdot q_{izp}}{T} - \frac{m \cdot q_{izp}'}{T} \cdot \frac{1}{1 - \frac{dT}{T}} = 0$$

$$\frac{m \cdot q_{izp}}{T} - \frac{m \cdot q_{izp}'}{T}\left(1 + \frac{dT}{T}\right) = 0$$

$$m \cdot q_{izp} - m \cdot q_{izp}' = +\frac{dT}{T} m \cdot q_{izp}$$

$$+dp\,(V_{par} - V_{teh}) = \frac{dT}{T} \cdot m \cdot q_{izp}$$

$$\boxed{dp\,(V_{par} - V_{teh}) = \frac{dT}{T}\, m \cdot q_{izp}}$$

ker je $V_{par} > V_{teh}$ je za $dT > 0$ tudi $dp > 0$

Talk torj raste s temperaturo.

Idealni plin:

za plin velja $V_{tek} \ll V_{plin}$ in $p \cdot V_{par} = \frac{m}{M} RT$

$$V_{para} = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT}{p}$$

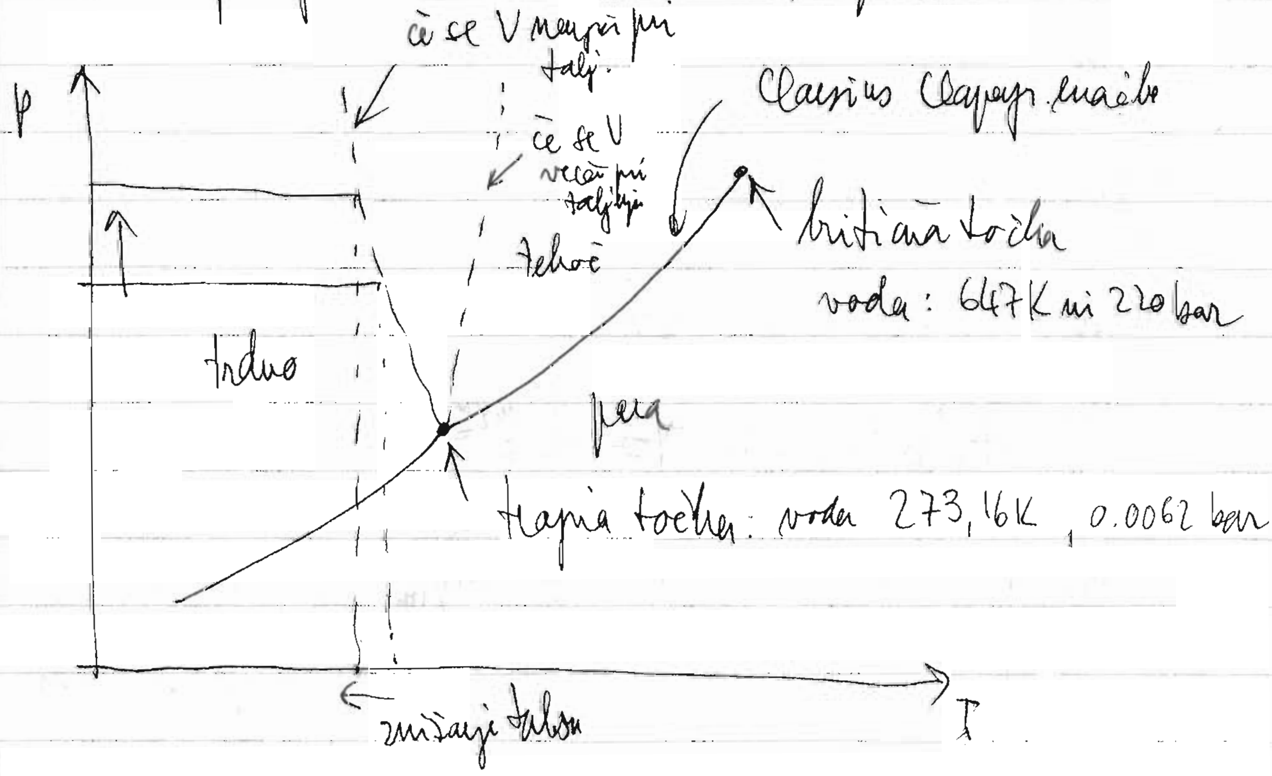
$$\frac{dp}{dT} = \frac{m \cdot q_{izp}}{T(V_{par}-V_{tek})} \approx \frac{m \cdot q_{izp}}{T \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{p}}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{M \cdot q_{izp} \cdot p}{RT^2}$$ ali $$\frac{dp}{p} = \frac{M \cdot q_{izp}}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}$$

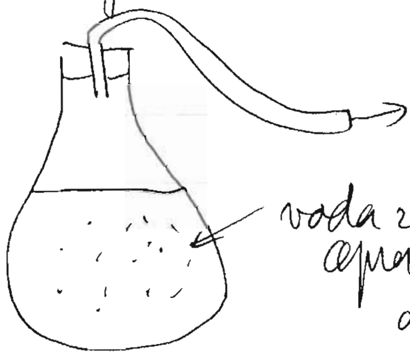
$$\boxed{\frac{dp}{p} = \frac{M \cdot q_{izp}}{R} \cdot \frac{dT}{T^2}}$$ Clausius Clapeyronova enačba

Iz zgornje enačbe vidimo, da tlak raste s temperaturo. Če zadevo integriramo, dobimo:

$$p = p' e^{\frac{M \cdot q_{izp}}{R}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)}$$ eksp. rast



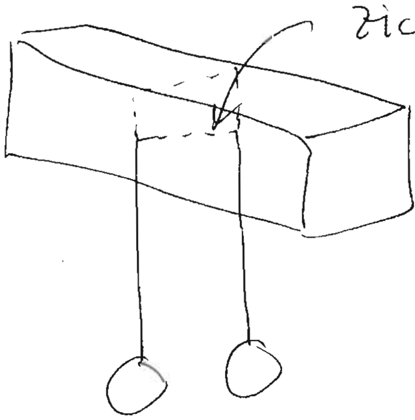
1. Poskus: s padanjem tlaka se vrelišče zniža



Črpalka

voda začne vreti, čeprav je njen T nižja od 100°C

2. Poskus: regelacija: Pri vodi se z naraščajočim tlakom tališče niža. Zaradi tega lahko z žico prerežemo ledeno klado.



žica "potuje" po ledu, ker se ob žici led stali zaradi velikega tlaka. Za žico se led zopet zamrzne. Podoben efekt je pri drsalkah → led se tali in imamo tanko plast vode.

Clausius Clapeyronovo enačbo se da uporabiti tudi za račun odvisnosti tališča od ~~tla~~ tlaka:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{m \cdot q_{tal}}{T(V_{tek} - V_{trd})}$$

dve možnosti

a) $V_{tek} > V_{trd} \Rightarrow \frac{dp}{dT} > 0$

Tlak raste s tališčem višato

b) $V_{tek} < V_{trd} \Rightarrow \frac{dp}{dT} < 0$

(led/voda)