Elektromagnetno polje: 1. vaje

(3. in 4. 10. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

0. Razlaga in izpeljava Fourierjeve transformacije

[*Fourierjeva transformacija (FT), inverzna FT, FT gradienta in Laplaceovega operatorja*]

1. Poissonova enačba za točkasti naboj

[*Fourierjeva transformacija, Greenove funkcije*]

Reši Poissonovo enačbo za potencial električnega polja točkastega naboja e,

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -\frac{e}{\varepsilon_0}\delta(\vec{r}),$$

s pomočjo Fourierjeve transformacije.

Elektromagnetno polje: 2. vaje

(10. in 11. 10. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Električno polje vodikovega atoma

[*določitev gostote naboje iz potenciala, Laplaceov operator v krogelnih koordinatah*]

Potencial električnega polja vodikovega atoma v osnovnem stanju ima obliko

$$U(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right),$$

kjer je r oddaljenost od jedra atoma z nabojem e in $\alpha^{-1} = a_B/2$, pri čemer je a_B Bohrov radij. Določi prostorsko gostoto naboja, ki vodi do takšnega potenciala. Kvalitativno interpretiraj dobljeni rezultat.

2. Električno polje nabite okrogle plošče

[*seštevanje prispevkov točkastih nabojev*]

Izračunaj jakost električnega polja vzdolž osi enakomerno nabite okrogle plošče s polmerom a, in sicer kot funkcijo oddaljenosti od plošče z. Površinska gostota naboja na plošči je σ. Končni rezultat poenostavi za dva posebna primera:

a) zelo blizu plošče in

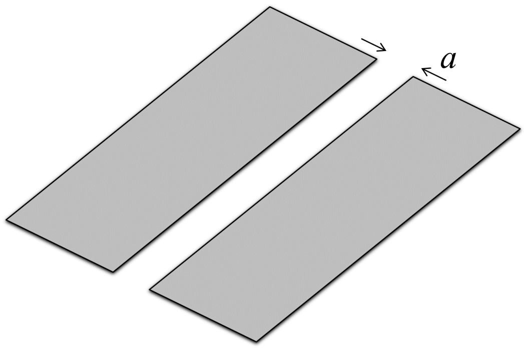
b) daleč stran od plošče.

Ustrezna rezultata primerjaj a) s poljem neskončne ravne plošče oziroma b) s poljem točkastega naboja.

3. Električno polje nabite ravne plošče z režo

[*seštevanje prispevkov točkastih nabojev*]

Iz velike tanke izolatorske plošče, ki je enakomerno nabita z nabojem površinske gostote σ, izrežemo ravno režo širine a, kakor prikazuje slika.



a) Določi jakost električnega polja E v ravnini, ki je pravokotna na ploščo in poteka skozi sredino reže, kot funkcijo oddaljenosti z od ravnine plošče.

b) Pod a) dobljeni izraz za $E(z)$ poenostavi v limiti majhnih in velikih z ter skiciraj odvisnost $E(z)$.

Uporaben razvoj za $x > 0$: $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - x + \cdots$

Elektromagnetno polje: 3. vaje

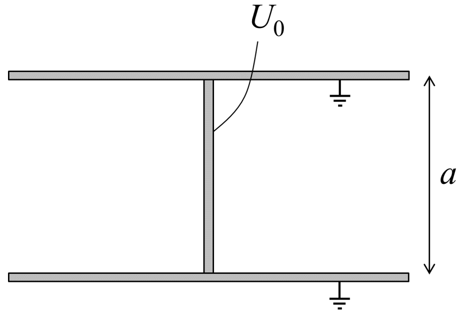
(17. in 18. 10. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Prečni trak v ploščatem kondenzatorju

[*separacija spremenljivk v kartezičnih koordinatah*]

Med dve veliki ravni prevodni plošči, ki se nahajata v medsebojni razdalji a, vstavimo dolg raven prevodni trak širine a, tako da je pravokoten na plošči in se plošč ravno še ne dotika (glej sliko). Plošči ozemljimo, na trak pa priključimo napetost U_0.



a) Izračunaj potencial električnega polja povsod znotraj takšnega kondenzatorja.

b) Poenostavi dobljeni izraz za velike oddaljenosti od traku.

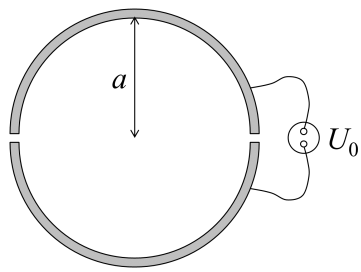
c) Izračunaj jakost električnega polja v simetrijski ravnini kondenzatorja, vzporedni z njegovima ploščama. Dobljeno vrsto seštej.

Uporabna vrsta: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\, e^{-nz} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\, z}$.

2. Prepolovljena prevodna cev

[*separacija spremenljivk v valjnih koordinatah*]

Dolgo prevodno cev polmera a vzdolž osi prepolovimo, polovici malenkost razmaknemo in mednju priključimo konstantno napetost U_0, kakor v prečnem preseku cevi prikazuje slika. Stena cevi je tanka, razmik med polovicama cevi pa majhen v primerjavi z a.



a) Določi potencial električnega polja povsod *znotraj* cevi kot funkcijo valjnih koordinat r in φ (merjen od vodoravne ravnine). Rezultat zapiši kot neskončno vrsto.

b) Pokaži, da jakost električnega polja v *vodoravni* simetrijski ravnini znotraj cevi kaže navpično navzdol in ima velikost

$$E(r) = \frac{2U_0 a}{\pi(a^2 - r^2)},$$

kjer je r oddaljenost od osi cevi.

c) Pokaži, da v *navpični* simetrijski ravnini znotraj cevi jakost električnega polja tudi kaže navpično navzdol, njena velikost pa je

$$E(r) = \frac{2U_0 a}{\pi(a^2 + r^2)}.$$

Elektromagnetno polje: 4. vaje

(24. in 25. 10. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Prevodna krogla v homogenem električnem polju

[*separacija spremenljivk v krogelnih koordinatah, Legendrovi polinomi*]

Prevodno kroglo s polmerom a postavimo v zunanje homogeno električno polje z jakostjo E_0, zaradi česar se polje popači.

a) Izračunaj potencial nastalega električnega polja povsod v prostoru. Kvalitativno interpretiraj končni rezultat oziroma razloži obliko obeh dobljenih členov.

b) Izračunaj površinsko gostoto naboja, ki se inducira na površini krogle, kot funkcijo polarnega kota ϑ, merjenega od smeri zunanjega električnega polja.

c) Izračunaj električni dipolni moment induciranega naboja? Rezultat lahko prebereš naravnost iz rešitve pod a).

2. Točkasti električni dipol v središču prevodne sfere

[*separacija spremenljivk v krogelnih koordinatah, Legendrovi polinomi*]

V središče izolirane votle prevodne sfere polmera a postavimo točkasti električni dipol z električnim dipolnim momentom p.

a) Določi potencial električnega polja povsod znotraj sfere.

b) Pokaži, da je električno polje naboja, ki se inducira na notranji površini sfere, *homogeno* in izračunaj njegovo velikost?

c) Izračunaj skupni dipolni moment induciranega naboja. Kakšno smer ima glede na točkasti dipol? Je rezultat presenetljiv?

3. Točkasti naboj nad prevodno ploščo

[*zrcaljenje*]

V razdalji d nad veliko ozemljeno prevodno ploščo se nahaja točkasti naboj e.

a) Določi potencial električnega polja povsod v prostoru. Kakšno je električno polje pod ploščo, se pravi na drugi strani?

b) Izračunaj površinsko gostoto naboja, ki se inducira na plošči, kot funkcijo oddaljenosti r od točke na plošči, ki je najbližje točkastemu naboju. Pokaži, da celotni induciran naboj na plošči znaša ravno $-e$. Ali lahko do tega rezultata prideš tudi na enostaven način?

4. Električna sila na točkasti naboj nad prevodno ploščo

[*napetostni tenzor električnega polja*]

V razdalji d nad veliko ozemljeno prevodno ploščo se nahaja točkasti naboj e. Z uporabo napetostnega tenzorja izračunaj električno silo na točkasti naboj. Rezultat primerjaj s silo med točkastima nabojema e in $-e$ v medsebojni razdalji $2d$.

Elektromagnetno polje: 5. vaje

(7. in 8. 11. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Električna sila na polovico prevodne krogle

[*napetostni tenzor električnega polja*]

Prevodno kroglo polmera a postavimo v navpično homogeno električno polje jakosti E_0. Izračunaj električno silo, ki deluje na zgornjo polovico krogle. V katero smer kaže ta sila?

2. Točkasti naboj v kotu med dvema pravokotnima prevodnima ploščama

[*zrcaljenje, multipolni razvoj*]

Točkasti naboj e se nahaja v kotu med dvema razsežnima prevodnima ozemljenima ploščama, ki sta pravokotni druga na drugo, tako da je od vsake oddaljen za razdaljo a.

a) Izračunaj kvadrupolni moment nastale porazdelitve nabojev.

b) Kako se obnaša potencial električnega polja v veliki oddaljenosti r, kjer je $r \gg a$?

Potencial električnega polja, ki ga povzroči lokalizirana porazdelitev nabojev v točki $\vec{r}$, v multipolnem razvoju zapišemo kot

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e}{r} + \sum_i p_i \frac{r_i}{r^3} + \sum_{ij} Q_{ij}\frac{r_i r_j}{r^5} + \cdots\right),$$

kjer so $p_i = \int \rho(\vec{r}\,')r_i'\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$ komponente vektorja dipolnega momenta in

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}\,')\left[3r_i'r_j' - \delta_{ij}r'^2\right]\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

komponente tenzorja kvadrupolnega momenta, $\rho(\vec{r}\,')$ pa je prostorninska gostota naboja v točki $\vec{r}\,'$.

3. Magnetno polje tokovne zanke

[*vektorski potencial magnetnega polja, magnetni dipolni moment*]

Izračunaj vektorski potencial magnetnega polja krožne zanke s polmerom a in električnim tokom I v veliki oddaljenosti od zanke. Rezultat podaj z oddaljenostjo r od središča zanke in s kotom ϑ glede na os zanke. Pri računu obdrži le vodilni člen v razvoju po r. Pokaži, da ima tako dobljeni rezultat obliko vektorskega potenciala magnetnega dipola z magnetnim dipolnim momentom $\pi a^2 I$.

Elektromagnetno polje: 6. vaje

(14. in 15. 11. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Magnetno polje nabite vrteče se okrogle plošče

[*Biot-Savartova enačba, magnetni dipolni moment*]

Tanko okroglo ploščo polmera a enakomerno premažemo z nabojem površinske gostote σ in jo v vodorvanem položaju zavrtimo z enakomerno kotno hitrostjo ω okrog navpične osi, ki poteka skozi središče plošče.

a) Z uporabo Biot-Savartove enačbe izračunaj velikost gostote magnetnega polja B na navpični osi plošče kot funkcijo oddaljenosti z od središča plošče.

b) Pokaži, da je magnetni dipolni moment plošče $p_m = \frac{\pi}{4}\sigma\omega a^4$.

c) V razvoju pod a) izračunanega izraza za $B(z)$ v Taylorjevo vrsto določi člen, ki najpočasneje pada z z. Utemelji, zakaj je to dipolni člen. Iz njegove oblike preberi magnetni dipolni moment plošče in ga primerjaj z izrazom pod b).

2. Magnetna sila v koaksialnem kablu

[*napetostni tenzor magnetnega polja*]

Dolg koaksialni kabel je sestavljen iz tanke prevodne cevi polmera a, po osi katere poteka tanek prevodni vodnik. Po vodniku spustimo električni tok I, ki se v nasprotni smeri vrača enakomerno porazdeljen po cevi. Izračunaj silo na dolžinsko enoto, s katero je po obodu napeta cev koaksialnega kabla.

Elektromagnetno polje: 7. vaje

(21. in 22. 11. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Magnetna sila v toroidni tuljavi

[*Amperov zakon, napetostni tenzor magnetnega polja*]

Po toroidni tuljavi s številom ovojev N teče električni tok I. Polmer ovojev tuljave je r_1, os tuljave pa opisuje krog s polmerom r_2 v vodoravni ravnini.

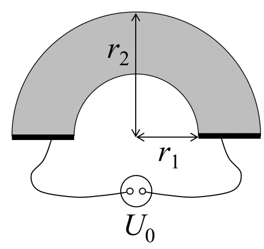
a) Pokaži, da je gostota magnetnega polja znotraj tuljave odvisna le od oddaljenosti od navpične osi torusa r in jo izračunaj. Pokaži, da zunaj tuljave ni polja.

b) Za primer $r_2 \gg r_1$ z uporabo napetostnega tenzorja izračunaj, s kakšno silo je napet posamezni ovoj tuljave.

2. Upor prevodne ploščice

[*potencial električnega polja v prevodniku*]

Iz kovinske plošče debeline d s specifično prevodnostjo σ izrežemo ploščico v obliki polovice kolobarja z notranjim polmerom r_1 in zunanjim polmerom r_2. Na ravni stranici ploščice naparimo elektrodi iz zelo dobrega prevodnika, mednju pa priključimo izvor konstantne napetosti U_0, kakor prikazuje slika. Določi potencial električnega polja v ploščici in s pomočjo tega izračunaj upor ploščice.



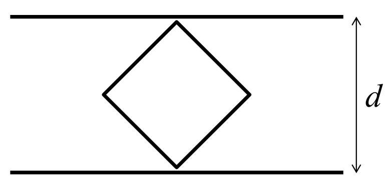
3. Indukcija v okvirju

[*indukcija, lastna induktivnost, medsebojna induktivnost*]

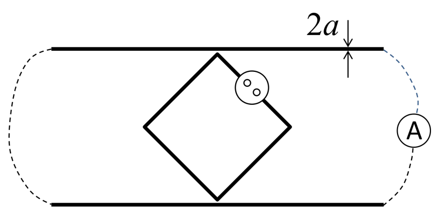
Kvadratni okvir iz tankega vodnika postavimo med dva vzporedna dolga tanka ravna vodnika, tako da ravnina okvirja sovpada z ravnino, ki jo definirata vodnika, diagonala okvirja je pravokotna na vodnika, skrajni točki okvirja pa se ravno še ne dotikata vodnikov (glej prvo sliko). Razdalja med dolgima vodnikoma in dolžina diagonale okvirja znašata po d.

a) Pokaži, da je medsebojna induktivnost okvirja in para vodnikov

$$L_{12} = \frac{2\ln 2}{\pi}\mu_0 d.$$



b) Okvir napajamo z izmeničnim tokom amplitude I_1. Kakšna je amplituda toka I_2, ki se inducira v vzporednih vodnikih, če ju *daleč stran* sklenemo (druga slika)? Pri tem delu naloge upoštevaj, da imata vodnika debelino $2a$ in dolžino l, tako da je $a \ll d$ in $l \gg d$. Rezultat za I_2/I_1 izrazi s parametri d, a in l ter ga numerično izvrednoti za $l/d = d/a = 10$.



Elektromagnetno polje: 8. vaje

(28. in 29. 11. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Cabrerin eksperiment

[*magnetni monopoli, indukcija*]

Blas Cabrera je leta 1982 poročal o eksperimentu, v katerem je v 151 dneh opazovanja domnevno zaznal magnetni monopol. Za zaznavo magnetnega monopola je uporabil krožno kovinsko zanko v superprevodnem stanju, skozi katero je meril električni tok. Predpostavi, da magnetni monopol z magnetnim nabojem g potuje s hitrostjo v po osi takšne krožne zanke polmera a in induktivnosti L.

a) Izračunaj in nariši časovni potek magnetnega pretoka skozi zanko. Magnetno polje monopola je v točki $\vec{r}$ glede na monopol podano z enačbo

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 g}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

b) Izračunaj in nariši časovni potek v zanki induciranega električnega toka. Posplošeni Faradayev zakon za primer obstoja magnetnih monopolov zapišemo kot

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m,$$

kjer je $\vec{j}_m$ vektor gostote toka magnetnih nabojev.

c) Iz rezultata pod b) sledi, da pri prečkanju magnetnega monopola magnetni pretok skozi zanko skoči za vrednost $\mu_0 g$. Pokaži, da to ustreza ravno dvema kvantoma magnetnega pretoka h/e. Kvantizacijo magnetnega pretoka po Diracu zapišemo kot $\frac{1}{2}\mu_0 g e = h$.

Cabrerin eksperiment je zaznal natanko en magnetni monopol. Kasnejši podobni eksperimenti magnetnih monopolov niso več zaznali.

2. Kožni pojav v širokem ravnem vodniku

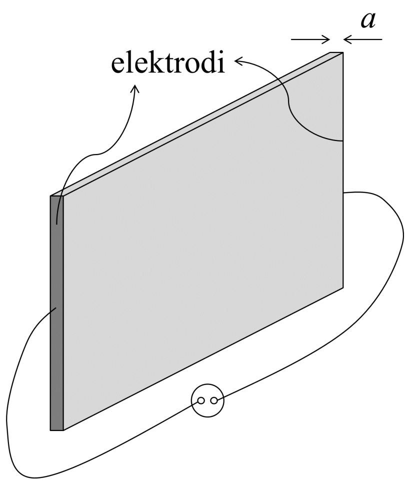
[*kvazistatična aproksimacija Maxwellovih enačb*]

Skrajni ploskvi dolgega in širokega kovinskega traku debeline a premažemo z idealno prevodnima elektrodama in mednju priključimo vir izmenične napetosti krožne frekvence ω, kakor prikazuje slika. Debelina traku je precej manjša od preostalih dveh razsežnosti traku, specifična prevodnost kovine pa je σ.

a) Pokaži, da impedanco traku v opisani postavitvi lahko zapišemo kot

$$Z = R_0 \, \frac{ka/2}{\operatorname{th}(ka/2)},$$

kjer je $k = (1+i)\sqrt{\mu_0 \sigma \omega / 2}$ kompleksni valovni vektor, R_0 statični upor traku, th pa označuje hiperbolični tangens.



b) Izračunaj faktor, za katerega se pri *visokih* frekvencah (zaradi kožnega pojava) upor traku poveča glede na njegov statični upor. Kolikšen pa je upor traku pri *nizkih* frekvencah?

Elektromagnetno polje: 9. vaje

(5. in 6. 12. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Energijski tok v koaksialnem kablu in v valjastem vodniku

[*Poyntingov izrek*]

Izračunaj energijski tok skozi prečni presek oziroma skozi zunanjo površino naslednjih dveh vodnikov:

a) koaksialnega kabla, kjer je napetost med žilo in plaščem U, ta pa po njima v nasprotnih smereh poganja električni tok I,

b) dolgega ravnega vodnika preseka S in dolžine l iz kovine s specifično prevodnostjo σ, po katerem teče električni tok I. Končni rezultat izrazi s celotno upornostjo vodnika $R = l/(\sigma S)$.

V obeh primerih interpretiraj dobljeni rezultat.

2. Prekinjeni vodnik

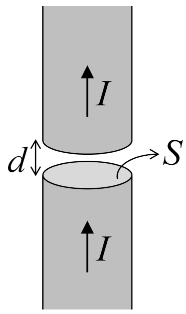
[*Poyntingov izrek*]

Dolg raven valjasti vodnik preseka S je na nekem mestu prekinjen. Prekinitev ima obliko ozke špranje širine d pravokotne na vodnik (glej sliko). Ob času $t = 0$ po vodniku spustimo konstanten električni tok I, zaradi katerega se na zgornji in spodnji meji špranje začne nabirati naboj.

a) Določi smer in velikost jakosti električnega polja ter gostote magnetnega polja v špranji v oddaljenosti r od osi vodnika ob času t.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj energijski tok, ki ob času t priteka v špranjo.

c) Prejšnji rezultat primerjaj s časovnim odvodom energije elektromagnetnega polja v špranji.

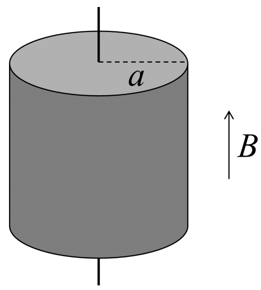


Pri vseh računih zanemari popačitev polj ob zunanjem robu špranje. Špranjo torej obravnavaj kot ploščati kondenzator. Upornost vodnika je zanemarljivo majhna.

3. Feynmanov paradoks v valjni različici

[*vrtilna količina elektromagnetnega polja*]

Dolg raven vodnik je enakomerno nabit z nabojem dolžinske gostote $-\lambda$. Vodnik je obdan z dolgim izolatorskim valjem, ki se lahko prosto vrti okoli svoje osi, ki sovpada z vodnikom (glej sliko). Vztrajnostni moment valja na dolžinsko enoto je j, površina valja pa je premazana z nabojem površinske gostote $\lambda/(2\pi a)$, kjer je a polmer valja, tako da je skupni naboj ravno nasproten skupnemu naboju na vodniku. Sprva je v prostoru homogeno magnetno polje B v smeri vodnika, ki ga nato počasi ugasnemo.



a) Preko spremembe vrtilne količine elektromagnetnega polja izračunaj, s kakšno kotno hitrostjo se valj zavrti.

b) Kotno hitrost izračunaj tudi neposredno preko Faradayevega zakona in se prepričaj, da dobiš enak rezultat.

c) Če dolžinsko gostoto naboja na ravnem vodniku spremenimo na vrednost $-\lambda' \neq -\lambda$, medtem ko površinska gostota naboja na valju ostane $\lambda/(2\pi a)$, se pod a) izračunana kotna hitrost *spremeni.* Tedaj je namreč na začetku tudi v prostoru okrog valja električno polje neničelno, s tem pa tudi vrtilna količina elektromagnetnega polja. Po drugi strani pa se pod b) izračunana kotna hitrost *ne spremeni.* To navidezno protislovje se imenuje Feynmanov paradoks. Kako ga razrešiti?

Elektromagnetno polje: 10. vaje

(12. in 13. 12. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Radialno polarizirana krogla

[*polarizacija, vezani naboj*]

Krogla polmera a je polarizirana tako, da ima vektor polarizacije znotraj krogle krajevno odvisnost $\vec{P}(\vec{r}) = k\vec{r}$, kjer je k znana konstanta. Izračunaj:

a) prostorninsko gostoto vezanega naboja v krogli, površinsko gostoto vezanega naboja na površini krogle in skupni naboj v krogli,

b) jakost električnega polja povsod po prostoru.

Rezultat pod b) pokaže, da je električno polje v krogli kar sorazmerno s polarizacijo. Zakaj?

2. Prepolovljena polarizirana krogla

[*polarizacija, vezani naboj*]

Kroglo, izdelano iz snovi s homogeno polarizacijo $\vec{P}$, prerežemo na pol, tako da gre rez skozi središče krogle in je pravokoten na $\vec{P}$. Obe polovici krogle malenkost razmaknemo, tako da je razmik *zelo majhen* v primerjavi s polmerom krogle. Izračunaj gostoto električnega polja v špranji med polovicama krogle. Najprej reši nalogo za neprerezano kroglo in razmisli, kako se rezultat spremeni v opisanem primeru.

3. Ploščica iz anizotropnega dielektrika

[*tenzor dielektrične konstante, robni pogoji za snov*]

Med plošči ploščatega kondenzatorja kapacitete C_0 vstavimo ploščico anizotropnega dielektrika, tako da ploščica zapolnjuje celotno prostornino kondenzatorja. Dielektrična konstanta ima lastne vrednosti ε_1, ε_1 in ε_2, ploščica pa je odrezana tako, da lastna os, ki ji ustreza lastna vrednost ε_2, z normalo plošč oklepa kot φ. Izračunaj kapaciteto tako zapolnjenega kondenzatorja.

Elektromagnetno polje: 11. vaje

(19. in 20. 12. 2017)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Točkast električni dipol v krogelni votlini dielektrika

[*dielektrična konstanta, vezani naboj, robni pogoji za snov*]

V razsežni homogeni snovi z dielektrično konstanto ε je krogelna votlina polmera a. V njeno središče postavimo točkast električni dipol z električnim dipolnim momentom p.

a) Izračunaj potencial električnega polja povsod po prostoru kot funkcijo krogelnih koordinat r in ϑ. Na podlagi dobljenega izraza pokaži, da ima električno polje zunaj krogelne votline obliko polja električnega dipola z električnim dipolnim momentom $p' = \frac{3p}{2\varepsilon+1}$. Polarni kot ϑ je merjen od smeri dipola.

b) Izračunaj *površinsko* gostoto vezanega naboja na površini krogelne votline kot funkcijo polarnega kota ϑ. Izhajaš lahko iz pod a) podanega izraza za p'.

c) Utemelji, zakaj je *prostorninska* gostota vezanega naboja povsod v snovi enaka nič.

2. Elektromagnetni valovi v hladni plazmi

[*zveza med makroskopskimi in mikroskopskimi količinami*]

Pri obravnavi potovanja elektromagnetnih valov po hladni plazmi lahko predpostavimo, da sestavni ioni zaradi velike mase skoraj mirujejo, sestavni elektroni pa so skoraj povsem prosti, tako da se hitro odzivajo na zunanja polja. Ker je plazma hladna, lahko termično gibanje elekronov zanemarimo.

a) S pomočjo enačbe gibanja za proste elektrone mase m in naboja $-e$ pokaži, da frekvenčno odvisnost dielektričnosti plazme zapišemo kot $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, kjer je $\omega_p = \sqrt{ne^2/(m\varepsilon_0)}$ plazemska frekvenca in n številska gostota elektronov v plazmi.

b) S pomočjo rezultata pod a) pokaži, da je disperzijska relacija elektromagnetnih valov, ki se lahko širijo po plazmi, $\omega(k) = \sqrt{\omega_p^2 + c_0^2 k^2}$, kjer je c_0 hitrost elektromagnetnega valovanja v vakuumu. Posebej obravnavaj limitna primera velikih in majhnih frekvenc.

c) S pomočjo rezultata pod b) izračunaj in skiciraj frekvenčno odvisnost fazne in grupne hitrosti elektromagnetnih valov v plazmi. Primerjaj obe hitrosti s hitrostjo svetlobe v vakuumu.

Elektromagnetno polje: 12. vaje

(3. 1. 2018)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Longitudinalni elektromagnetni valovi v snovi

[*konstitutivna relacija*]

Za popoln opis obnašanja električnega polja v snovi moramo poznati dodatno zvezo med posameznimi polji in porazdelitvami, med katerimi so $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$, $\vec{j}$ in ρ. Takšni zvezi pravimo konstitutivna relacija. V običajnih dielektrikih je to zveza med $\vec{D}$ in $\vec{E}$, ki definira dielektrično konstanto.

V neki snovi se konstitutivna relacija glasi

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E},$$

kjer je $\vec{j}$ prostorninska gostota električnega toka, ρ prostorninska gostota naboja, c_0 in ω_p pa znani konstanti. Pokaži, da se po snovi lahko širijo *longitudinalni* valovi in določi njihovo disperzijsko relacijo. Ali na podlagi dobljene disperzijske relacije prepoznaš za kakšno snov gre?

Pojav longitudinalnih elektromagnetnih valov je redkejši kot pojav transverzalnih valov, kakršni so, denimo, edini mogoči v vakuumu.

2. Valovni vodnik iz vzporednih prevodnih plošč

[*širjenje elektromagnetnega valovanja v omejeni geometriji*]

Veliki vzporedni prevodni plošči v medsebojni razdalji a uporabimo kot valovni vodnik.

a) Če smer širjenja valovanja označimo z z, pokaži, da lahko komponente E_x, E_y, H_x in H_y jakosti električnega in magnetnega polja vse izrazimo s komponentama E_z in H_z. Za popolno poznavanje elektromagnetnega polja v valovnem vodniku torej zadostuje poiskati krajevni odvisnosti vzdolžnih komponent E_z in H_z. To velja v splošnem, za valovni vodnik s poljubnim presekom.

b) Izračunaj krajevno odvisnost vzdolžne komponente E_z za transverzalni magnetni (TM) način valovanja, pri katerem je $H_z = 0$, in krajevno odvisnost vzdolžne komponente H_z za transverzalni električni (TE) način valovanja, pri katerem je $E_z = 0$. Za oba primera izračunaj tudi disperzijsko relacijo valovanja.

c) Pokaži, da ima v TM načinu impedanca valovnega vodnika, ki jo definiramo kot $Z = E_\perp / H_\parallel$ (kjer je $E_\perp$ komponenta električnega polja pravokotna na plošči, $H_\parallel$ pa komponenta magnetnega polja vzporedna s ploščama), frekvenčno odvisnost $Z = Z_0\sqrt{1-\omega_0^2/\omega^2}$, kjer je $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ upor vakuuma in ω_0 najnižja možna frekvenca valovanja v uporabljenem valovnem načinu.

d) Pokaži, da je v TM načinu razmerje *amplitud* prečne in vzdolžne komponente jakosti električnega polja enako k/κ, kjer je k valovni vektor valovanja in κ valovni vektor, ki opisuje prečno krajevno odvisnost polj. Ta rezultat nam omogoča preprosto predstavo širjenja valovanja vzdolž plošč: valovanje izgleda kot periodično odbijanje valovnih front med obema ploščama.

Elektromagnetno polje: 13. vaje

(9. in 10. 1. 2018)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Valjasta cev kot valovni vodnik

[*širjenje elektromagnetnega valovanja v omejeni geometriji*]

Dolgo prevodno cev polmera a uporabimo kot valovni vodnik.

a) Izračunaj krajevno odvisnost vzdolžne komponente jakosti električnega polja $E_z(r,\varphi)$ za transverzalni magnetni (TM) način valovanja in krajevno odvisnost vzdolžne komponente jakosti magnetnega polja $H_z(r,\varphi)$ za transverzalni električni (TE) način valovanja, kjer os cevi kaže vzdolž osi z, r in φ pa sta valjni koordinati v ravnini pravokotni na z.

b) Za vsak način valovanja določi disperzijsko relacijo in izračunaj najmanjšo frekvenco, pri kateri se valovanje še lahko širi po vodniku.

Spodnji tabeli povzemata ničle Besslovih funkcij in odvodov Besslovih funkcij.

k	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715
2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386
3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002
4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801
5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178

k	$J_0'(x)$	$J_1'(x)$	$J_2'(x)$	$J_3'(x)$	$J_4'(x)$	$J_5'(x)$
1	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156
2	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199
3	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872
4	13.3237	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
5	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.1960	20.5755

2. Transverzalni električni in magnetni (TEM) valovi v valovnem vodniku

[*širjenje elektromagnetnega valovanja v omejeni geometriji*]

Pri transverzalnih električnih in magnetnih (TEM) valovih sta električno in magnetno polje, $\vec{E}$ in $\vec{H}$, pravokotni na smer širjenja valovanja. V praznem prostoru je to edini način širjenja valovanja, v valovnih vodnikih pa je to poseben način, ki obstaja le pod določenimi pogoji.

a) Pokaži, da v TEM načinu velja $\nabla \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}$, kjer je $\vec{k}$ valovni vektor, in podobno za $\vec{H}$. S pomočjo teh dveh zvez pokaži, da je disperzijska relacija TEM valovanja linearna, $\omega = ck$, kjer je c hitrost valovanja.

b) Pokaži, da sta amplitudi obeh polj kar rešitvi Laplaceove enačbe, $\nabla_\perp^2 \vec{E} = 0$ in $\nabla_\perp^2 \vec{H} = 0$, kjer $\nabla_\perp$ označuje operator gradienta v smeri pravokotni na smer širjenja valovanja. Hkrati ti dve enačbi predstavljata statično limito valovne enačbe, torej limito $\omega = 0$ in $k = 0$. To pomeni, da je iskanje TEM načina valovanja ekvivalentno reševanju statičnega problema za dani valovni vodnik.

c) Na podlagi rezultata pod b) razloži, zakaj se TEM valovanje ne more širiti v valovnih vodnikih s sklenjenim presekom, lahko pa širi, na primer, v koaksialnem kablu ali med dvema vzporednima ploščama.

3. TEM valovanje v koaksialnem kablu

[*širjenje elektromagnetnega valovanja v omejeni geometriji*]

Koaksialni kabel je sestavljen iz dveh dolgih prevodnih cevi polmerov a in b ter tankih sten. Prostor med cevema je zapolnjen s snovjo, ki se obnaša kot plazma s frekvenčno odvisnostjo dielektrične konstante

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

kjer je ω_p plazemska frekvenca. V takšen valovni vodnik spustimo elektromagnetno valovanje v TEM načinu.

a) Izračunaj disperzijsko relacijo elektromagnetnega valovanja v valovnem vodniku.

b) Impedanco vodnika definiramo kot razmerje med napetostjo med cevema in tokom po posamezni cevi. Izračunaj frekvenčno odvisnost impedance vodnika in jo skiciraj. Pojasni, zakaj impedanca pri frekvenci ω_p divergira.

Elektromagnetno polje: 14. vaje

(16. in 17. 1. 2018)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. Sevanje kratke dipolne antene

[*sevalni približek*]

Ravni vodnik dolžine l, ki ga napajamo z izmeničnim tokom $I = I_0 \sin(\omega t)$, ki je povsod vzdolž vodnika *enak*, uporabimo kot oddajno anteno. Vodnik je kratek v primerjavi z valovno dolžino $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ izsevanega valovanja, kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu. Takšni anteni pravimo tudi Hertzov dipol.

a) Izračunaj krajevno in časovno odvisnost magnetnega in električnega polja, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ in $\vec{E}(\vec{r}, t)$, v sevalnem približku, torej daleč stran od antene.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj časovno povprečje celotne moči izsevanega valovanja. Dobljeni rezultat zapiši kot ZI_{eff}^2, kjer je Z sevalni upor antene in $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ efektivni tok v anteni, in na ta način izračunaj Z.

2. Sevanje dipolne antene

[*sevalni približek*]

Ko ravni vodnik uporabimo kot oddajno dipolno anteno, je tok po njegovi dolžini običajno porazdeljen. Vzdolž vodnika se namreč vzpostavi stoječi tokovni val, ki ga za vodnik dolžine l, napajan na sredini, v splošnem zapišemo kot

$$I(z', t) = I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z'|\right)\right] \sin(\omega t),$$

kjer je I_0 amplituda toka, z' koordinata vzdolž vodnika (ki teče od $-l/2$ do $l/2$), k pa valovni vektor. Pri zapisani tokovni porazdelitvi tok na robovih vodnika pade na nič, kakor bi pričakovali. Stoječi tokovni val ima posebej lepo obliko, če je dolžina vodnika lihi večkratnik $\lambda/2$, se pravi $l = \lambda/2$, $3\lambda/2 \ldots$

Za primera $l = \lambda/2$ in $l = 3\lambda/2$ izpelji in skiciraj prostorsko porazdelitev gostote energijskega toka, ki ga seva takšna dipolna antena. Rezultat za $l = \lambda/2$ primerjaj z rezultatom za preprostejši primer Hertzovega dipola, tako da oba narišeš na isto sliko.

3. Sevanje majhne tokovne zanke

[*sevalni približek*]

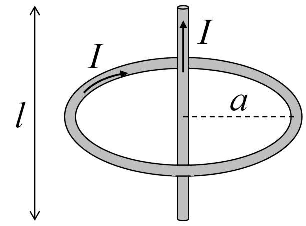
Krožno zanko polmera a, ki jo napajamo z izmeničnim tokom $I = I_0 \sin(\omega t)$, uporabimo kot oddajno anteno. Zanka je majhna v primerjavi z valovno dolžino $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ izsevanega valovanja, kjer je c_0 hitrost svetlobe v vakuumu.

a) Izračunaj krajevno in časovno odvisnost magnetnega in električnega polja, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ in $\vec{E}(\vec{r}, t)$, v sevalnem približku, torej daleč stran od antene.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj časovno povprečje celotne moči izsevanega valovanja. Dobljeni rezultat zapiši kot ZI_{eff}^2, kjer je Z sevalni upor antene in $I_{\text{eff}} = I_0/\sqrt{2}$ efektivni tok v anteni, in na ta način izračunaj Z.

4. Sevanje kombinirane antene
[*sevalni približek*]

Za oddajanje krožno polariziranega valovanja lahko uporabimo anteno v obliki nesklenjene vodoravne krožne zanke z navpičnima koncema (glej sliko). Predpostavi, da je antena *majhna* v primerjavi z valovno dolžino λ valovanja, ki ga oddaja. Potem jo lahko obravnavamo kot kombinacijo vodoravne krožne zanke polmera a in navpične prečke dolžine l, ki simetrično prebada zanko (glej sliko). Anteno napajamo z električnim tokom $I = I_0 \sin \omega t$.



a) Določi električni in magnetni dipolni moment takšne antene kot funkcijo časa t.

b) Pokaži, da je v poljubni smeri valovanje, ki ga takšna antena oddaja, eliptično polarizirano.

c) Kako moramo izbrati l pri danem a in dani valovni dolžini λ, da bo valovanje res krožno polarizirano?

V sevalnem približku je gostota magnetnega polja nihajočega električnega dipola $\vec{p}_e$ v točki $\vec{r}$ podana kot $\vec{B}_e = -\frac{\mu_0}{4\pi c_0 r}\,\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}_e(t - \frac{r}{c_0})$, ustrezni rezultat za magnetni dipol $\vec{p}_m$ pa je $\vec{B}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi c_0^2 r}\,\hat{e}_r \times \left[\hat{e}_r \times \ddot{\vec{p}}_m(t - \frac{r}{c_0})\right]$, kjer je c_0 hitrost svetlobe in $\hat{e}_r = \vec{r}/r$.