

Elektromagnetno polje: 1. pisni izpit

(5. 2. 2021 ob 15:00 na daljavo)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, martin.klanjsek@ijs.si)

Izjava o častnem ravnanju:

Potrjujem:

- da bom kolokvijske naloge reševal(a) povsem samostojno, brez sodelovanja s komer koli,
- da ne bom nikomur drugemu pomagal(a) pri reševanju teh nalog in
- da ne bom na kakršen koli drug nepošten način izrabljal(a) posebnih okoliščin preverjanja znanja na daljavo.

Zavedam se, da rezultatov kolokvija ne bo mogoče upoštevati, če bi kazali, da kolokvij ni potekal pošteno.

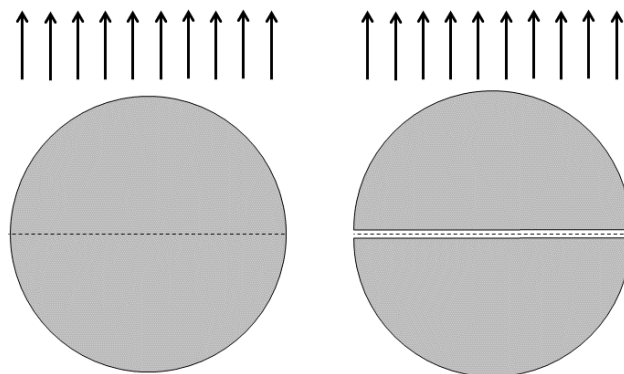
Prva vrstica vsake oddane strani: s *tiskanimi črkami* naj bodo zapisani ime, priimek, vpisna številka, napis "Potrjujem, da se strinjam z Izjavo o častnem ravnanju!" in podpis.

1. naloga

Po dolgem *vodoravnem* valjnem vodniku polmera a spustimo električni tok, ki je po preseku vodnika porazdeljen tako, da ima njegova gostota j inverzno odvisnost od oddaljenosti od osi vodnika r , se pravi $j = k/r$, kjer je k znani koeficient. Izračunaj silo na dolžinsko enoto vodnika, s katero zgornja polovica vodnika deluje na spodnjo polovico vodnika. Rezultat zapiši tako, da v njem namesto koeficienta k nastopa celoten električni tok I_0 po vodniku.

2. naloga

Kroglo iz izolatorske snovi z dielektrično konstanto ε postavimo v homogeno električno polje jakosti E_0 , kakor v preseku prikazuje prva slika. Kroglo skozi središče prerežemo na dve polovici, tako da je ravnina prereza (označena s črtkano črto na prvi sliki) pravokotna na polje. Nato polovici krogle v smeri polja rahlo razmaknemo (druga slika), tako da je razmak med polovicama krogle *zelo majhen* v primerjavi s polmerom krogle. Izračunaj jakost električnega polja v špranji med polovicama krogle.



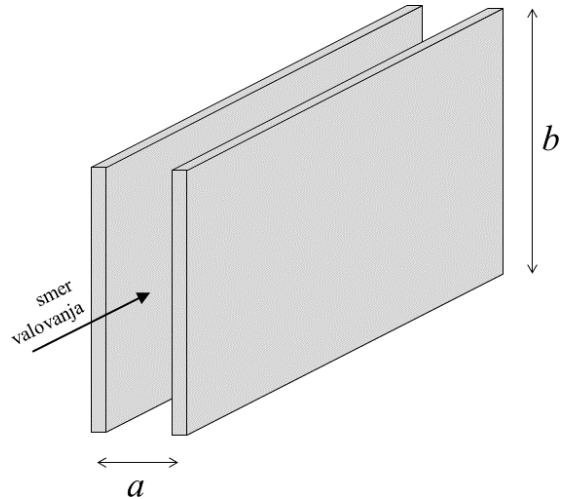
Nasvet: Najprej izračunaj električno polje v neprerezani krogli.

3. naloga

Dva *dolga* ravna prevodna trakova širine b postavimo vzporedno drugega z drugim v medsebojni razdalji a , tako da tvorita ploščati kondenzator, kjer je $a \ll b$ (kakor prikazuje slika). V tako pripravljen valovni vodnik v smeri trakov spustimo elektromagnetno valovanje z amplitudo jakosti magnetnega polja H_0 . Z uporabo Poyntingovega vektorja izračunaj časovno povprečje energijskega toka (se pravi prenešene moči) elektromagnetnega valovanja za:

- TEM način valovanja (tako da je vektor električnega polja pravokoten na trakova, vektor magnetnega polja pa vzporeden z njima),
- TM način valovanja s krožno frekvenco ω znotraj uporabnega pasu, pri čemer je spodnja meja uporabnega pasu ω_{\min} .

Izračunaj razmerje energijskih tokov pod a) in b). Kateri način je za prenos moči ugodnejši?



Pripomoček: Transverzalne komponente jakosti električnega in magnetnega polja E_x, E_y, H_x in H_y izrazimo z longitudinalnima komponentama E_z in H_z na naslednji način:

$$E_x = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad E_y = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}$$

$$H_x = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad H_y = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2},$$

kjer sta ω in k frekvenca in valovni vektor valovanja, c_0 pa hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z, \quad dS = lr \, d\varphi, \quad dV = lr \, dr \, d\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi, \quad dS = r^2 \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi, \quad dV = r^2 \, dr \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Oddaja rešitev kolokvija: Vsako stran rešitev je treba fotografirati pod pravim kotom s čim manjšim obdajajočim robom in vse fotografije v priponki (kot združeni PDF ali kot ločene JPG-je, če ne gre drugače) poslati na elektronski naslov emp.kolokvij@gmail.com, kjer so v polju "subject" zapisani ime, priimek in vpisna številka.