Elektromagnetno polje: 1.A pisni izpit

(25. 11. 2022 ob 14:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. naloga

Tanka okrogla plošča polmera a vsebuje enakomerno porazdeljene električne dipole, ki vsi kažejo v isto smer pravokotno na ploščo. Površinska gostota električnega dipolnega momenta v plošči po velikosti znaša λ_e.

a) Izračunaj potencial električnega polja $U(z)$ na osi plošče v odvisnosti od koordinate z vzdolž osi plošče, pri čemer se plošča nahaja pri $z = 0$.

b) Izraz za $U(z)$ poenostavi za velike oddaljenosti od plošče in pokaži, da ima tudi dobljeni izraz obliko dipolnega člena.

c) Skiciraj odvisnost $U(z)$ na *celotni* osi z, pri čemer na grafu jasno označi glavne značilnosti krivulje.

2. naloga

Poseben koaksialni vodnik je sestavljen iz dveh dolgih tankih prevodnih cevi polmerov a in b ($b > a$), ki imata skupno os, po kateri poteka tanek prevodni vodnik. Po tem vodniku spustimo električni tok I, ki se v nasprotni smeri vrača enakomerno porazdeljen po obeh ceveh, tako da je v vsaki cevi skupni tok $I/2$. Za *obe cevi* izračunaj, s kolikšno silo na dolžinsko enoto cevi sta po obodu napeti.

3. naloga

Tanko prevodno krogelno lupino polmera a vzdolž njenega ekvatorja prerežemo na dve enaki polovici. Polovici *malenkost* razmaknemo, tako da se ravno ne dotikata, in mednju priključimo napetost U_0. Potencial električnega polja na polovicah tako znaša $U_0/2$ in $-U_0/2$.

a) Izračunaj potencial električnega polja povsod po prostoru, tako *znotraj* kot *zunaj* lupine. Ker ima rezultat obliko neskočne vrste, v obeh primerih natančno izračunaj prva dva neničelna člena v vrsti.

b) Natančno izračunaj jakost električnega polja v središču krogelne lupine in skupni električni dipolni moment induciranih nabojev na celotni lupini.

Spodaj je nekaj uporabnih matematičnih pripomočkov.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r,\varphi) = A + B\ln r + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m r^m + B_m r^{-m}\right)\cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m r^m + D_m r^{-m}\right)\sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta),$$

3) Nekaj lastnosti Legendrovih polinomov:

$$P_l(x) = (-1)^l P_l(-x), \qquad \int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}.$$

3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z, \quad \mathrm{d}S = lr\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = lr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{bmatrix}.$$

4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi, \quad \mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{bmatrix}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani
`http://www-f5.ijs.si/emp-2022-2023.html`.
Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovalnik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.
