

Elektromagnetno polje: 1.B pisni izpit

(20. 1. 2023 ob 10:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. naloga

Po dolgi ravni tuljavi dolžine l z velikim številom ovojev N teče električni tok I . Polmer ovojev tuljave je a . V nekem trenutku začnemo tok skozi tuljavo enakomerno zmanjševati, tako da njegov časovni odvod znaša $-\alpha$.

- Izračunaj odvisnost jakost električnega polja v tuljavi od oddaljenosti od osi tuljave.
- S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj skupni energijski tok, ki zapušča površino tuljave.
- Preveri, da se pod b) dobljeni rezultat ravno ujema s časovnim odvodom energije elektromagnetnega polja v tuljavi.

2. naloga

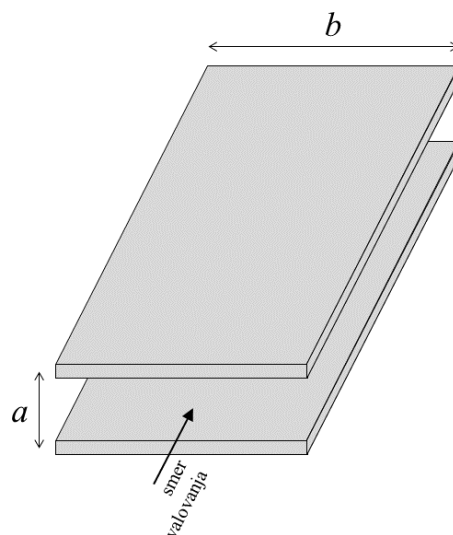
Kroglo iz snovi z dielektrično konstanto ϵ postavimo v navpično homogeno električno polje jakosti E_0 , zaradi česar se krogla električno polarizira. Izračunaj

- jakost električnega polja v krogli in
- polarizacijo krogle.

3. naloga

Dva *dolga* ravna prevodna trakova širine b postavimo vzporedno druga z drugim v medsebojni razdalji a , tako da tvorita ploščati kondenzator, kjer je $a \ll b$ (kakor prikazuje slika). V tako pripravljen valovni vodnik v smeri trakov spustimo elektromagnetno valovanje v TM načinu z amplitudo jakosti magnetnega polja H_0 in s krožno frekvenco ω znotraj uporabnega pasu, pri čemer je spodnja meja uporabnega pasu ω_{\min} .

- Izračunaj vse neničelne komponente jakosti električnega in magnetnega polja ter iz njih časovno povprečje gostote električne energije $\langle w_e \rangle$ in gostote magnetne energije $\langle w_m \rangle$ v vodniku. Pokaži, da sta njuna integrala po preseku vodnika (pravokotnem na smer širjenja valovanja) enaka: $\int \langle w_e \rangle dS = \int \langle w_m \rangle dS$.



- b) Izračunaj *grupno hitrost* valovanja v vodniku in pokaži, da je kar enaka *transportni hitrosti*

$$v_t = \frac{\int \langle P \rangle dS}{\int \langle w_e + w_m \rangle dS},$$

kjer je $\int \langle P \rangle dS$ časovno povprečje energijskega toka valovanja v valovnem vodniku. Zaradi lažjega izračuna lahko uporabiš rezultat iz zadnje naloge vaj

$$\int \langle P \rangle dS = \frac{1}{4} Z_0 H_0^2 ab \sqrt{1 - \frac{\omega_{\min}^2}{\omega^2}},$$

kjer je $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ impedanca vakuuma.

Pripomoček: Transverzalne komponente jakosti električnega in magnetnega polja E_x, E_y, H_x in H_y izrazimo z longitudinalnima komponentama E_z in H_z na naslednji način:

$$E_x = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad E_y = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}$$

$$H_x = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad H_y = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2},$$

kjer sta ω in k frekvenca in valovni vektor valovanja, c_0 pa hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

- 1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

- 2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = (3x^2 - 1)/2, P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \dots$ Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani

<http://www-f5.ijs.si/emp-2022-2023.html>.

Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovalnik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.