

Elektromagnetno polje: 2. pisni izpit

(3. 2. 2023 ob 13:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, martin.klanjsek@ijs.si)

1. naloga

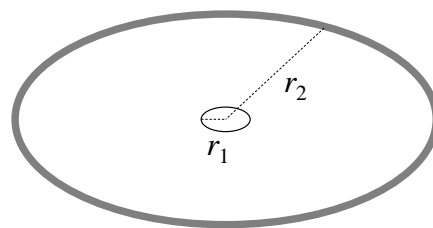
Dolg *vodoraven* valj polmera a iz prevodnega materiala postavimo v *navpično* homogeno električno polje jakosti E_0 . Izračunaj električno silo na dolžinsko enoto valja, ki deluje na zgornjo vzdolžno polovico valja.

2. naloga

Majhno prevodno krožno zanko polmera r_1 namestimo v središče *veliko večje* prevodne krožne zanke polmera r_2 (se pravi $r_2 \gg r_1$), tako da ravnini zank sovpadata, kakor prikazuje slika. Upornost zank je zanemarljivo majhna. Polmer vodnikov, iz katerih sta zanki, je v primeru vsake zanke α -krat manjši od polmera zanke, pri čemer je $\alpha \gg 1$.

a) Pokaži, da medsebojno induktivnost zank lahko zapišemo kot $L_{12} = \pi\mu_0 r_1^2 / (2r_2)$.

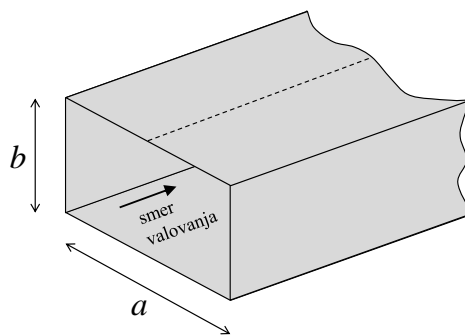
b) V manjši zanki je sprva električni tok I_0 , v večji zanki pa ni toka. Nato tok v manjši zanki v času t_0 enakomerno zmanjšamo na nič. Določi časovni potek toka v večji zanki in izračunaj njegovo končno vrednost.



Upoštevaj, da je lastna induktivnost krožne zanke polmera r , izdelane iz vodnika polmera r/α ($\alpha \gg 1$), enaka $L = \mu_0 r \ln(8\alpha)$.

3. naloga

V valovni vodnik pravokotnega preseka z vodoravno stranico a in navpično stranico b (kjer je $b < a$, kakor prikazuje slika) pošljemo elektromagnetno valovanje v TE valovnem načinu (to je brez longitudinalne komponente električnega polja), tako da amplituda transverzalne komponente električnega polja znaša E_0 . Frekvenco valovanja ω izberemo tako, da leži znotraj uporabnega pasu, to je med minimalnima frekvenca najnižjih dveh vej disperzijske relacije.



a) Pokaži, da je gostota površinskega električnega toka v navpičnih dveh stenah valovnega vodnika 1) pravokotna na smer širjenja valovanja (ima torej navpično smer) in 2) je neodvisna od navpične koordinate. 3) Izračunaj frekvenčno odvisnost njene amplitude.

b) Gostota površinskega električnega toka v vodoravnih dveh stenah valovnega vodnika pa ima dve komponenti, tako vzdolž smeri širjenja valovanja kot pravokotno nanjo. Za to drugo komponento 1) pokaži, da je na sredinskih črtah vodoravnih sten (na sliki označena s črtkano črto za zgornjo steno) enaka nič, in 2) izračunaj frekvenčno odvisnost njene amplitude na robovih sten.

Gostota površinskega električnega toka K_i vzdolž koordinate i je definirana kot razmerje med ustreznim električnim tokom dI_i in prečno razsežnostjo dl na površini kot $K = dI_i/dl$. Izpelješ jo iz ustreznega robnega pogoja za polji. Rezultat pod b1) je pomemben, saj pokaže, da lahko vzdolž vodoravnih dveh sten po sredini naredimo ozko špranjo, ki nam omogoča v valovni vodnik vstaviti merilnike polj, ne da bi pri tem kakorkoli vplivali na samo valovanje.

Pripomoček: Transverzalne komponente jakosti električnega in magnetnega polja E_x, E_y, H_x in H_y izrazimo z longitudinalnima komponentama E_z in H_z na naslednji način:

$$E_x = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad E_y = \frac{i \left(k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}$$

$$H_x = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad H_y = \frac{i \left(k \frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2},$$

kjer sta ω in k frekvenca in valovni vektor valovanja, c_0 pa hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisec enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani

<http://www-f5.ijs.si/emp-2022-2023.html>.

Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovanik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.