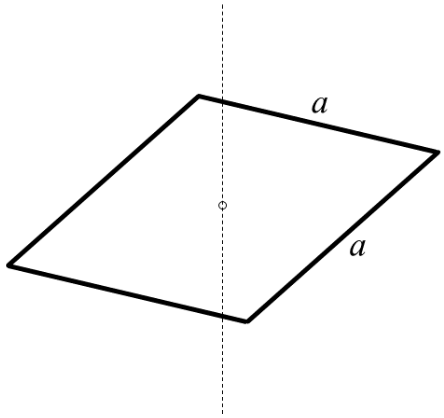
Elektromagnetno polje: 2. pisni izpit

(3. 9. 2021 ob 13:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. naloga

Tanek vodnik oblikujemo v vodoraven kvadratni okvir, kakor prikazuje slika. Skozi okvir spustimo električni tok I.

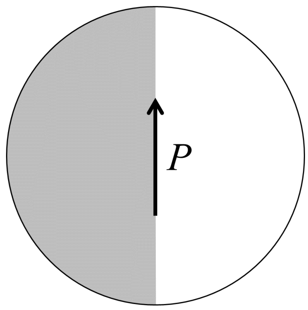


a) Izračunaj velikost gostote magnetnega polja B na navpični osi okvirja (črtkana črta na sliki), ki poteka skozi njegovo središče (označena točka), v odvisnosti od oddaljenosti z od središča okvirja.

b) Dobljeni izraz za $B(z)$ poenostavi za primer velikih z ter ugotovi, s kakšno potenco pada z z.

2. naloga

Dolg valj polmera a je izdelan iz snovi s homogeno konstantno polarizacijo P, ki kaže pravokotno na os valja, kakor v preseku prikazuje slika.



a) Izračunaj silo na dolžinsko enoto valja, ki deluje na osenčeno polovico valja.

b) V katero smer kaže ta sila?

3. naloga

Po toroidni tuljavi z velikim številom ovojev N teče električni tok I. Polmer ovojev tuljave je r_1, os tuljave pa opisuje krog s polmerom r_2, kjer je $r_2 \gg r_1$. V nekem trenutku začnemo tok skozi tuljavo enakomerno ugašati, tako da njegov časovni odvod znaša $\dot{I}$.

a) Izračunaj jakost električnega polja v tuljavi. Razmisli, kakšno smer ima v posameznih točkah znotraj tuljave.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj energijski tok, ki zapušča površino tuljave.

c) Preveri, da se pod b) dobljeni rezultat ravno ujema s časovnim odvodom energije elektromagnetnega polja v tuljavi.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r,\varphi) = A + B\ln r + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m r^m + B_m r^{-m}\right)\cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m r^m + D_m r^{-m}\right)\sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$, $P_3(x) = (5x^3-3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta),$$

3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z, \quad \mathrm{d}S = lr\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = lr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}.$$

4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi, \quad \mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{bmatrix}.$$

5) Uporaben integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.