

Elektromagnetno polje: 2. pisni izpit

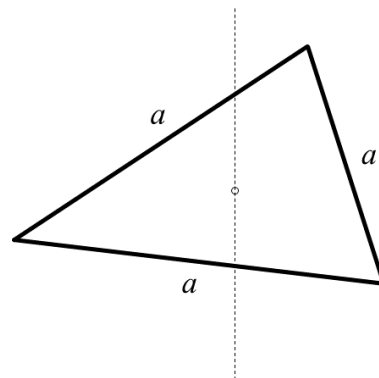
(3. 2. 2022 ob 10:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjšek@ijs.si*)

1. naloga

Tanek vodnik oblikujemo v vodoraven okvir oblike enakostraničnega trikotnika s stranico a , kakor prikazuje slika. Skozi okvir spustimo električni tok I .

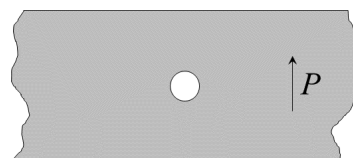
- Izračunaj velikost gostote magnetnega polja B na navpični osi okvirja (črtkana črta na sliki), ki poteka skozi njegovo središče (označena točka), v odvisnosti od oddaljenosti z od središča okvirja.
- Dobljeni izraz za $B(z)$ poenostavi za primer velikih z in s pomočjo tega izračunaj magnetni dipolni moment okvirja.



2. naloga

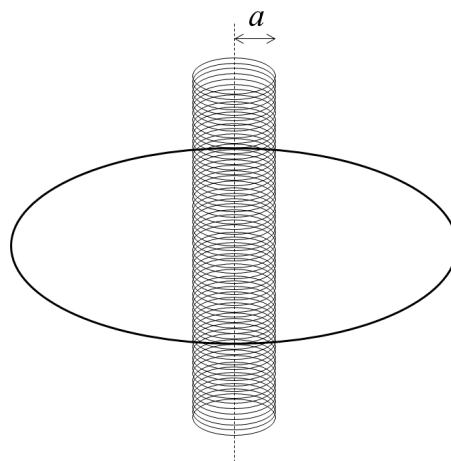
Razsežna debela vodoravna plošča je izdelana iz snovi s *homogeno* polarizacijo P v smeri pravokotni na ploščo, kakor prikazuje zgornja slika.

- Pokaži, da je tudi električno polje *v plošči* homogeno in da je njegova jakost P/ϵ_0 .
- V sredini plošče izdolbemo majhno krogelno votlino polmera a (ki je *majhen* v primerjavi z debelino plošče), kakor prikazuje spodnja slika. Pokaži, da je električno polje znotraj votline homogeno in izračunaj njegovo jakost. Izračunaj tudi skupni dipolni moment vezanih nabojev na robu votline.



3. naloga

Po *dolgi* tuljavi z n ovoji na dolžinsko enoto in polmerom posameznega ovoja a teče električni tok. Okrog tuljave je prevodna krožna zanka z upornostjo R in polmerom b , ki je *mного večji* od a , tako da osi zanke in tuljave (črtkana črta na sliki) sovpadata (kot je prikazano na sliki). Tok v tuljavi začnemo *enakomerno* zmanjševati, tako da njegov časovni odvod znaša $dI/dt = -\alpha$.



- a) Izračunaj električni tok, ki se pri tem inducira v zanki.
- b) Izračunaj Poyntingov vektor tik ob zunanji površini tuljave in pokaži, da kaže ven iz tuljave. *Nasvet:* Predpostavi, da je električno polje tik ob zunanji površini tuljave enako kot tik ob notranji površini in izračunaj tega. Pri izračunu magnetnega polja zanke tik ob zunanji površini tuljave upoštevaj, da je tuljava zelo ozka.
- c) Na podlagi rezultata pod b) izračunaj skupni energijski tok, ki zapušča tuljavo, in s tem preveri energijski zakon *za zanko*.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

- 1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

- 2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

- 3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z, \quad dS = lr \, d\varphi, \quad dV = lr \, dr \, d\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

- 4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi, \quad dS = r^2 \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi, \quad dV = r^2 \, dr \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

- 5) Uporaben integral:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani

<http://www-f5.ijs.si/emp-2021-2022.html>.

Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovalnik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.