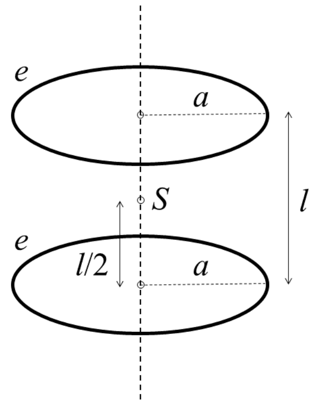
Elektromagnetno polje: 3. pisni izpit

(2. 9. 2022 ob 13:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

1. naloga

Dve enaki krožni zanki polmera a iz izolatorske snovi postavimo v medsebojno razdaljo l, tako da njuni osi sovpadata, kakor prikazuje slika. Na vsako izmed zank enakomerno nanesemo naboj e.



a) Izračunaj električno polje *na osi* posamezne zanke v odvisnosti od oddaljenosti od središča zanke.

b) V točki S na sredi med središčema obeh zank je električno polje E zaradi simetrije enako nič. S pomočjo rezultata pod a) izračunaj komponento gradienta električnega polja $\partial E/\partial z$ v točki S, kjer je z oddaljenost od S vzdolž osi zank. Določi razdaljo l tako, da bo tudi gradient $\partial E/\partial z$ *enak nič*. Na ta način dosežemo, da je območje skoraj ničelnega polja v bližini točke S nekoliko širše.

2. naloga

Dolg *vodoraven* valj polmera a je izdelan iz snovi s *homogeno* polarizacijo velikosti P in navpične smeri. Izračunaj silo na dolžinsko enoto valja, ki deluje na zgornjo polovico valja.
Nasvet: Za lažji izračun sile integracijsko ploskev skleni v neskončnosti.

3. naloga

Po dolgi ravni tuljavi dolžine l z velikim številom ovojev N teče električni tok I. Polmer ovojev tuljave je a. V nekem trenutku začnemo tok skozi tuljavo enakomerno zmanjševati, tako da njegov časovni odvod znaša $-\alpha$.

a) Izračunaj odvisnost jakost električnega polja v tuljavi od oddaljenosti od osi tuljave.

b) S pomočjo Poyntingovega vektorja izračunaj skupni energijski tok, ki zapušča površino tuljave.

c) Preveri, da se pod b) dobljeni rezultat ravno ujema s časovnim odvodom energije elektromagnetnega polja v tuljavi.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r,\varphi) = A + B\ln r + \sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m r^m + B_m r^{-m}\right)\cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m r^m + D_m r^{-m}\right)\sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$, $P_3(x) = (5x^3-3x)/2$, … Legendrovi polinomi:

$$U(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta),$$

3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z, \quad \mathrm{d}S = lr\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = lr\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}.$$

4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi, \quad \mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\end{bmatrix}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani `http://www-f5.ijs.si/emp-2021-2022.html`.
Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovalnik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.
