

Elektromagnetno polje: 1. kolokvij

(27. 11. 2020 ob 15:00 na daljavo)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjssek@ijs.si*)

Izjava o častnem ravnanju:

Potrjujem:

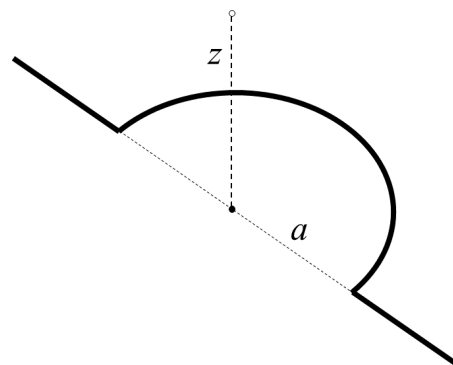
- da bom kolokvijske naloge reševal(a) povsem samostojno, brez sodelovanja s komer koli,
- da ne bom nikomur drugemu pomagal(a) pri reševanju teh nalog in
- da ne bom na kakršen koli drug nepošten način izrabljaj(a) posebnih okoliščin preverjanja znanja na daljavo.

Zavedam se, da rezultatov kolokvija ne bo mogoče upoštevati, če bi kazali, da kolokvij ni potekal pošteno.

Prva vrstica vsake oddane strani: s *tiskanimi črkami* naj bodo zapisani ime, priimek, vpisna številka, napis "Potrjujem, da se strinjam z Izjavo o častnem ravnanju!" in podpis.

1. naloga

Dolg raven vodnik iz tanke žice na sredini preoblikujemo tako, da nastane polkrožna izboklina polmera a , pri čemer ravna dela vodnika ležita na skupni premici, kakor prikazuje slika. Po vodniku spustimo električni tok I . Izračunaj velikost gostote magnetnega polja v točki (prazna točka na sliki), ki je vzdolž osi (črtkana črta na sliki) polkrožne izbokline oddaljena za z od središča izbokline (polna točka na sliki).



2. naloga

Valjni kondenzator sestavljata dve dolgi kovinski cevi polmerov a in b ($b > a$) s tankima stenama, katerih vzdolžni osi sovpadata. Med cevi priključimo napetost U_0 . Določi električno polje povsod v prostoru in preko njega z uporabo napetostnega tenzorja električnega polja za *obe* cevi izračunaj, s kolikšno silo na dolžinsko enoto cevi sta napeti.

3. naloga

V zunanje električno polje s potencialom oblike $U(x, y, z) = V(z^2 - x^2/2 - y^2/2)$, kjer so x , y in z kartezične koordinate, postavimo prevodno kroglo polmera a s središčem v izhodišče koordinatnega sistema, zaradi česar se polje popači. Pri tem je V znana konstanta (gradient električnega polja), polje pa ima osno simetrijo okoli osi z .

- Določi potencial skupnega električnega polja povsod zunaj krogle. Najlažje ga podaš v krogelnih koordinatah.

- b) Izračunaj površinsko gostoto na krogli inducirane naboja v odvisnosti od kota ϑ , merjenega od simetrijske osi z .
- c) Pokaži, da sta skupni inducirani naboj na krogli in njegov dipolni moment enaka nič, ter izračunaj tenzor njegovega kvadrupolnega momenta.

Opomnik: komponente tenzorja kvadrupolnega momenta izračunamo kot $Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}') [3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2] d^3\vec{r}'$, kjer je $\rho(\vec{r}')$ prostorninska gostota naboja v točki \vec{r}' .

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

- 1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

- 2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

- 3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z, \quad dS = lr \, d\varphi, \quad dV = lr \, dr \, d\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

- 4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi, \quad dS = r^2 \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi, \quad dV = r^2 \, dr \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

- 5) Uporaben integral:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Oddaja rešitev kolokvija: Vsako stran rešitev je treba fotografirati pod pravim kotom s čim manjšim obdajajočim robom in vse fotografije v priponki (kot ločene JPG-je ali kot združeni PDF) poslati na elektronski naslov emp.kolokvij@gmail.com, kjer so v polju "subject" zapisani ime, priimek in vpisna številka.