

Elektromagnetno polje: 1.A pisni izpit

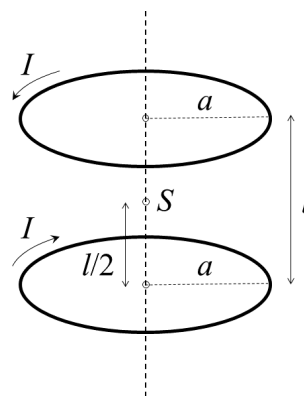
(26. 11. 2021 ob 17:00)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, martin.klanjsek@ijs.si)

1. naloga

Dve enaki prevodni krožni zanki polmera a postavimo v medsebojno razdaljo l , tako da njuni osi sovpadata, kakor prikazuje slika. Po zankah spustimo električni tok I v nasprotnih smereh.

- Izračunaj magnetno polje *na osi* posamezne tokovne zanke v odvisnosti od oddaljenosti od središča zanke.
- V točki S na sredi med središčema obeh zank je magnetno polje B enako nič. S pomočjo rezultata pod a) izračunaj komponento gradienta magnetnega polja $\partial B/\partial z$ v točki S , kjer je z oddaljenost od S vzdolž osi zank. Določi razdaljo l tako, da bo velikost tega gradienta največja, in jo izračunaj.



Takšno postavitev tokovnih zank imenujemo tudi gradientna tuljava, saj nam omogoča ustvariti izbrani gradient magnetnega polja. Uporablja se jo pri slikanju z magnetno resonanco.

2. naloga

Dolg vodoravno ležeč valj polmera a iz izolatorske snovi nabijemo tako, da prostorninska gostota naboja pada kot α/r z oddaljenostjo r od osi valja, kjer je α znana konstanta. Izračunaj električno silo na dolžinsko enoto valja, ki deluje na zgornjo polovico valja.

3. naloga

Tanko krogelno lupino polmera a iz izolatorske snovi nabijemo tako, da ima površinska gostota naboja obliko $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$, kjer je $\sigma_0 > 0$ površinska gostota naboja na zgornjem polu lupine, ϑ pa polarni kot merjen od tega pola.

- Izračunaj potencial električnega polja povsod po prostoru, tako znotraj kot zunaj krogelne lupine.
- S pomočjo rezultata pod a) izračunaj električno polje v središču krogelne lupine. Izračunaj tudi tenzor gradienta električnega polja \mathbf{V} v središču. Komponente tenzorja \mathbf{V} so definirane kot $V_{ij} = \partial^2 U / (\partial r_i \partial r_j)$, kjer je U potencial, r_i ($i = 1, 2, 3$) pa kartezične koordinate.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Periodične rešitve Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \varphi) = 0$ v *valjnih* koordinatah:

$$U(r, \varphi) = A + B \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{-m}) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{\infty} (C_m r^m + D_m r^{-m}) \sin(m\varphi).$$

2) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r, \vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \vartheta),$$

3) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *valjnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z, \quad dS = lr \, d\varphi, \quad dV = lr \, dr \, d\varphi, \quad \hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}.$$

4) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi, \quad dS = r^2 \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi, \quad dV = r^2 \, dr \, d(\cos \vartheta) \, d\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Rešitve nalog in ocene bodo objavljeni na spletni strani

<http://www-f5.ijs.si/emp-2021-2022.html>.

Rešitve nalog bodo vsebovale tudi točkovalnik. Za kasnejše lažje razumevanje ocene vsakomur priporočam, da si pred oddajo svoje rešitve fotografira.