Elektromagnetno polje: 2. kolokvij

(22. 1. 2021 ob 15:00 na daljavo)

asistent: Martin Klanjšek (01 477 3866, *martin.klanjsek@ijs.si*)

Izjava o častnem ravnanju:

Potrjujem:
- da bom kolokvijske naloge reševal(a) povsem samostojno, brez sodelovanja s komer koli,
- da ne bom nikomur drugemu pomagal(a) pri reševanju teh nalog in
- da ne bom na kakršen koli drug nepošten način izrabljal(a) posebnih okoliščin preverjanja znanja na daljavo.
Zavedam se, da rezultatov kolokvija ne bo mogoče upoštevati, če bi kazali, da kolokvij ni potekal pošteno.

Prva vrstica vsake oddane strani: s *tiskanimi črkami* naj bodo zapisani ime, priimek, vpisna številka, napis *"Potrjujem, da se strinjam z Izjavo o častnem ravnanju!"* in podpis.

---

1. naloga

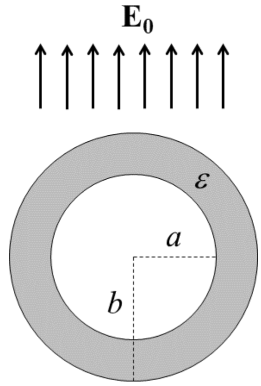
Majhno prevodno krožno zanko s ploščino S_1 namestimo v notranjost dolge ravne tuljave z N ovoji ploščine S_2 (kjer je $S_2 > S_1$), tako da osi zanke in tuljave sovpadata. Upornosti zanke in tuljave sta zanemarljivo majhni, konca tuljave pa sta *kratko sklenjena*. V zanki je sprva električni tok I_0, v tuljavi pa ni toka. Nato tok v zanki eksponentno ugasnemo, tako je njegov časovni potek $I_0 \exp(-t/\tau)$, kjer je τ karakteristični čas. Določi časovni potek toka v tuljavi in izračunaj njegovo končno vrednost.

2. naloga

Krogelno lupino z notranjim polmerom a in zunanjim polmerom b, izdelano iz dielektrične snovi z dielektrično konstanto ε, postavimo v navpično homogeno električno polje jakosti E_0, kakor v preseku skozi središče krogelne lupine prikazuje slika. Pokaži, da je tudi električno polje znotraj krogelne lupine (pri $r < a$) homogeno in da je njegova jakost

$$E_1 = \frac{9\varepsilon}{(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1) - 2(a/b)^3(\varepsilon-1)^2} E_0.$$

Za občutek izvrednoti, za kolikšen faktor je notranje električno polje oslabljeno glede na zunanje električno polje, če je $\varepsilon = 3$ in $b = 2a$.



3. naloga

V valovni vodnik pravokotnega preseka s stranicama a in $b \le a$ pošljemo elektromagnetno valovanje v TE valovnem načinu (to je brez longitudinalne komponente električnega polja).

a) Velikost b izberemo tako, da je pri dani velikosti a širina uporabnega pasu valovnega vodnika *čim večja*. Pokaži, da je potem $b \le a/2$. Širina uporabnega pasu je definirana kot razlika minimalnih frekvenc najnižjih dveh vej disperzijske relacije.

b) Pokaži, da časovno povprečje moči elektromagnetnega valovanja v valovnem vodniku s frekvenco *znotraj uporabnega pasu* lahko zapišemo kot

$$\frac{E_0^2}{4Z_0}\, ab \sqrt{1-\frac{\omega_{\mathrm{min}}^2}{\omega^2}},$$

kjer je E_0 amplituda električnega polja v valovanju, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ impedanca praznega prostora, ω krožna frekvenca valovanja in ω_{min} spodnja meja uporabnega pasu.

Rezultata pod a) in b) pokažeta, zakaj pri valovnih vodnikih s pravokotnim presekom običajno izberemo $b = a/2$. Na ta način pri dani velikosti a dosežemo največjo mogočo pasovno širino in pri tem pogoju še največjo mogočo moč valovanja v valovnem vodniku.

Pripomoček: Transverzalne komponente jakosti električnega in magnetnega polja E_x, E_y, H_x in H_y izrazimo z longitudinalnima komponentama E_z in H_z na naslednji način:

$$E_x = \frac{i\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad E_y = \frac{i\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}$$

$$H_x = \frac{i\left(k\frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial y}\right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2}, \quad H_y = \frac{i\left(k\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)}{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2},$$

kjer sta ω in k frekvenca in valovni vektor valovanja, c_0 pa hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Matematični pripomočki (ni rečeno, da vsi pridejo v poštev):

1) Rešitve osno simetrične Laplaceove enačbe $\nabla^2 U(r,\vartheta) = 0$ v *krogelnih* koordinatah, kjer so $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2-1)/2$, $P_3(x) = (5x^3-3x)/2$, ... Legendrovi polinomi:

$$U(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\vartheta),$$

2) Gradient, ploskovni in prostorninski element ter smerni vektor v *krogelnih* koordinatah:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi, \quad \mathrm{d}S = r^2\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}V = r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}(\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Čas reševanja: 90 minut.

Dovoljeni pripomočki: podani spisek enačb, matematični priročnik, kalkulator.

Oddaja rešitev kolokvija: Vsako stran rešitev je treba fotografirati pod pravim kotom s čim manjšim obdajajočim robom in vse fotografije v priponki (kot združeni PDF ali kot ločene JPG-je, če ne gre drugače) poslati na elektronski naslov emp.kolokvij@gmail.com, kjer so v polju "subject" zapisani ime, priimek in vpisna številka.
